

ESCAPITO

# MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS 3



Fortino Escareño  
Olga Leticia López

trillas 

# MATEMÁTICAS

# 3

Fortino Escareño  
Olga Leticia López

EDITORIAL  
TRILLAS  
México



### Catalogación en la fuente

Escareño, Fortino  
Matemáticas 3. -- 3a ed. -- México : Trillas, 2014  
(reimp. 2018).  
272 p. : il. col. ; 27 cm.  
Bibliografía: p. 268-271  
ISBN 978-607-17-1872-3

1. Matemáticas - Estudio y enseñanza (Secundaria).  
I. López, Olga Leticia. II. t.

D- 510'E566m LC- QA36'E8.53 4691

Todas las ilustraciones de esta obra son propiedad del editor.  
pp. 18-37, 39-41, 43-44, 47, 49-51, 55, 57, 61, 66-86, 88-91, 94, 96-99, 101-102, 104, 107-120, 122-138, 140-143, 145-147, 149-150, 155, 158-171, 173-174, 176-181, 184-191, 193-197, 199, 201-227, 231, 233-235, 237-243, 245-248.

Asimismo todos los iconos utilizados en el libro.

La presentación y disposición en conjunto de MATEMÁTICAS 3 son propiedad del editor.  
Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados  
©SX, 2014, Editorial Trillas, S. A. de C. V.

División Administrativa,  
Av. Río Churubusco 385,  
Col. Gral. Pedro María Anaya,  
C. P. 03340, México, Ciudad de México  
Tel. 56884235  
FAX 56041364  
churubusco@trillas.mx

División Logística,  
Calzada de la Viga 1132,  
C. P. 09439, México, Ciudad de México  
Tel. 56350995, FAX 56350870  
laviga@trillas.mx

Tienda en línea  
[www.etrillas.mx](http://www.etrillas.mx)

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana  
Reg. núm. 158

Primera edición SX (ISBN 978-968-24-8332-5)  
‡(50, T5)

Segunda edición 3-TT (ISBN 978-607-17-0839-7)

‡(5-TT, 5-6-TR, T1)

Tercera edición 1-TL

ISBN 978-607-17-1872-3

‡(TL, TA, TM, TE)

Reimpresión, 2018

Impreso en México  
Printed in Mexico

Se imprimió en  
Imprenta Ajusco, S. A. de C. V.  
José Ma. Agreda y Sánchez 223  
Col. Tránsito, Cuauhtémoc  
C. P. 06820, México, Ciudad de México

AO 68 TSSASS/IW

## Prólogo

El libro que ahora presentamos a la consideración de docentes y alumnos, ha sido elaborado con base en el enfoque de resolución de problemas.

En cuanto a la metodología didáctica que se utiliza en el texto, es la que conforma el planteamiento central de este enfoque, y consiste en proponer en el aula actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar para emprender procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación; a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y de expresar la solución; a usar los algoritmos, las fórmulas, reglas y definiciones para solucionar problemas, y a formular y comunicar argumentos que validen los resultados.

Con este fin, la estructura del libro está diseñada de modo que los maestros inicien las sesiones de clase con el planteamiento de un problema, cuyo nivel de dificultad permita que los alumnos, de manera individual, puedan construir una solución usando sus conocimientos previos, pero a la vez les provoque un conflicto cognitivo que los mueva a buscar la colaboración de sus compañeros.

Después del planteamiento del problema, el libro propone una sección de **Exploración y discusión**, en la cual se orienta la búsqueda de procedimientos formales de solución mediante algunas preguntas. La forma en que se plantean estas preguntas invita a que los alumnos interactúen organizados en parejas o equipos. La sección generalmente finaliza con la sugerencia de que los equipos presenten sus conclusiones en sesión plenaria, en donde podrán discutir, con la orientación del profesor, las aportaciones que sean de interés para el grupo. Es aquí donde el papel del profesor es esencial, ya que se requiere de su ayuda para analizar y socializar lo que los alumnos produjeron y confrontarlo así con el procedimiento formal, con la regla o la definición del contenido que se esté estudiando, para darle sentido y significado.

La lección cierra con la sección **Actividades adicionales**, cuyo propósito es que los alumnos apliquen en otros contextos lo aprendido y que lo vinculen con situaciones de la vida cotidiana, de otras disciplinas o de la propia matemática. En esta sección se insiste en que los estudiantes, de manera individual o integrados en equipos, busquen por su cuenta la forma de resolver los problemas que se les plantean, de modo que puedan ser observados y cuestionados por el docente, tanto para conocer los procedimientos y argumentos que se ponen en juego, como para aclarar dudas, destrabar procesos y lograr avances.

En ocasiones, los conocimientos y habilidades que se están estudiando requieren el uso de terminología y simbolismos nuevos para el alumno; por tal motivo, en recuadros bien identificados, se incluyen algunas notas con esa información matemática, que permitirán continuar con la exploración y la discusión de los temas.

En el libro se promueve el uso de diferentes recursos tecnológicos, entre ellos la calculadora y, si es posible, el programa de computadora *Geogebra*. Con respecto de

este último, en el Apéndice se incluye una guía para su manejo. La guía correspondiente a la calculadora se presenta en el libro de primer grado. Se recomienda además el uso de otros recursos disponibles; esto se hace mediante recuadros que presentan los sitios y nombres de los interactivos y videos, entre otros, a los cuales se puede acceder y, de esta forma, afirmar algunos aspectos de los contenidos que se estudian.

El libro contiene también una sección de **Sugerencias didácticas y de dosificación** de contenidos. En ella se ofrecen algunas recomendaciones sobre cuestiones a las que a veces no se les da la importancia debida. En las sugerencias de dosificación se propone un número estimado de sesiones para el estudio de cada contenido, número que seguramente variará según las condiciones de cada grupo.

Los maestros que utilicen este material encontrarán un intento por satisfacer sus inquietudes relacionadas con el cumplimiento de la aplicación del enfoque, el logro de los aprendizajes esperados y el desarrollo de competencias matemáticas en sus alumnos.

## Presentación para el maestro

### Maestro:

La tarea central del docente consiste en hacer de la clase un espacio social donde se construya el conocimiento. Para llegar a ese escenario, usted debe superar algunos desafíos, como lograr que los alumnos se acostumbren a buscar por su cuenta la manera de resolver los problemas que se les plantean, acostumbrarlos a leer y analizar los enunciados de los problemas, y lograr que aprendan a trabajar en equipo.

Este libro se ha diseñado con la idea de apoyarlo para construir poco a poco una didáctica que apunte hacia esa dirección, admitiendo que tal didáctica “se hace al andar”. Una de las principales acciones que llevan a caminar en ese sentido tiene que ver con una planeación de la clase cuyo eje sea el aprendizaje colaborativo. Enseguida se proponen algunas ideas para planear la clase tomando como base la estructura del libro.

Cada lección empieza con la sección denominada **Problema inicial**, donde se plantea una situación problemática. Pida a los alumnos que lo lean, que lo analicen y que traten de encontrar una respuesta personal. Tome en cuenta que, en muchas ocasiones, los alumnos obtienen respuestas diferentes; habrá que identificar las causas. Puede deberse a dificultades en la comprensión de la lectura, o a que han interpretado de manera distinta el enunciado del problema. En el primer caso, usted debe aceptar que el estudiante no dispone de otra base para iniciar sus procesos de aprendizaje, y sólo a partir de allí puede empezar a incrementar sus potencialidades. En el segundo caso, es preciso investigar cuáles han sido esas interpretaciones y sus motivos. En ambos casos hay que establecer acuerdos con esos alumnos para ayudarlos.

Después del problema inicial, se presenta una sección llamada **Exploración y discusión**. Para utilizarla, pida a sus alumnos que formen parejas (o equipos más grandes, si es el caso) para que comenten y discutan sus respectivas soluciones, tomando como guía las preguntas e instrucciones que aparecen en dicha sección. Su tarea aquí consistirá en caminar entre los distintos equipos para aclarar dudas, conocer argumentos y, si es necesario, plantear preguntas que ayuden a avanzar en el proceso de solución del problema. En este punto, su actitud debe ser firme para que cada miembro del equipo asuma la responsabilidad de la tarea, de modo que esté en posibilidad de explicar los procesos de solución que siguió el equipo. Una vez que la mayoría de los equipos llegaron a acuerdos, organice una puesta en común grupal, en la cual los equipos presentarán sus aportaciones y las que usted juzgue de más provecho para el grupo.

La lección cierra con la sección denominada **Actividades adicionales**. Para trabajar con ellas podrá seguirse una dinámica similar a la anterior.

Otros elementos que ofrece el libro y que pueden ser útiles a la hora de planear la clase son:

- a) **Sugerencias didácticas y de dosificación de contenidos.** Se incluye la dosificación propiamente dicha y recomendaciones sobre algunas cuestiones que

a veces se pasan por alto o que se requiere resaltar al abordar los contenidos del programa.

- b) **Proyectos.** Se describen al inicio de cada bloque y pretenden que los estudiantes apliquen tanto sus conocimientos previos como los que se estudian en el bloque en la resolución de problemas.
- c) **Cuestionarios de evaluación.** Se presentan al final de cada bloque y contienen reactivos semejantes a los de las pruebas estandarizadas. Usted tendrá la opción de utilizarlos como pruebas bimestrales, o bien, como un banco de reactivos de los que podrá echar mano en la elaboración de sus propios exámenes. Asimismo, a los alumnos se les ofrece, en cada bloque, un instrumento de autoevaluación que les permitirá reflexionar sobre qué tanto han alcanzado los aprendizajes esperados y sus dificultades en contenidos específicos. De este modo, usted contará con información de primera mano para apoyar a los alumnos y fortalecer su práctica docente.
- d) **Uso de las TIC.** Son sugerencias para que el alumno aproveche diversos recursos disponibles en internet, lo que le permitirá ampliar y consolidar los contenidos que está estudiando.

Muchos alumnos no están acostumbrados a este tipo de trabajo, y esperan que sea el maestro quien explique con toda claridad la forma en que se resuelve el problema planteado. La creación de un ambiente de trabajo cálido y relajado, en el que no prive la angustia por la calificación ni el interés por competir unos con otros, sino la colaboración, ayudará a que los alumnos aprendan a trabajar de esta manera.

Ésta es sólo una propuesta. Las sugerencias que usted, maestro, nos haga llegar para mejorarla, serán bien recibidas y tomadas en cuenta en futuras ediciones, porque creemos que sólo alcanzaremos mejores resultados si todos los que intervenimos en el proceso educativo trabajamos de manera conjunta.

LOS AUTORES

## Presentación para el alumno

Alumno:

Hemos diseñado este libro para ayudarte en el aprendizaje de las matemáticas. El auxilio que te ofrecemos consiste en proponer actividades para que analices, explores, reflexiones, preguntes tú mismo muchas cosas e incluso propongas.

¿Y por qué tantas preguntas? Porque estamos convencidos de que el conocimiento, en cualquier área, se adquiere preguntando y buscando respuestas a problemas que nos plantean o que nosotros mismos nos planteamos. Esto hace que las matemáticas sean interesantes, además de útiles. En este encuentro te toca una parte importante: debes involucrarte en las actividades que se te plantearán, así que deberás explorarlas y discutir las con tus compañeros.

Si le das una ojeada al libro, te darás cuenta de su estructura: todas las lecciones empiezan con un problema. Después del **problema inicial**, hay una sección llamada **Exploración y discusión**, cuyo propósito es guiarte en la resolución del problema. La lección termina con algunas **Actividades adicionales**, donde te proponemos que resuelvas problemas referidos al concepto o procedimiento de que trata la lección o a situaciones de tu entorno cercano o lejano. En la mayoría de las ocasiones deberás resolverlas en tu cuaderno.

Para obtener el mayor provecho del libro, te proponemos la siguiente forma de utilizarlo en clase: lee y analiza el problema con que inicia la lección y trata de resolverlo sin ayuda de nadie; es muy importante que des una respuesta *personal*. Las preguntas o instrucciones de la sección **Exploración y discusión** te permitirán enriquecer tu respuesta, porque podrás comentarla y discutirla con otros, según indique la viñeta que está junto a la pregunta o instrucción: trabajar *en parejas* o *en equipo*. Generalmente, al final de esta sección se pide realizar un trabajo *grupal*. Es el momento en el que los equipos (quizás no todos) presentan sus propuestas de solución al problema. Para la realización de las **Actividades adicionales** podrá seguirse una dinámica similar.

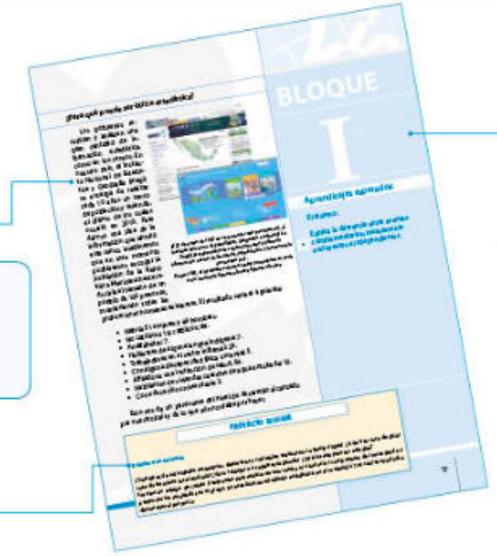
Como ves, no se trata de que tu maestro te explique todas las cosas para que tú las repitas; más bien, la idea es que aprendas matemáticas en colaboración con otros. Si trabajas de esta manera, a la larga aprenderás no sólo matemáticas, sino otras cosas muy importantes en la vida: a colaborar en lugar de competir, a expresarte bien cuando quieras dar a conocer tus ideas, a que es mejor la alegría de aprender que la de ganarle al compañero y, sobre todo, a no angustiarte por la calificación. Esto es lo más valioso que te habrá de aportar el estudio de las matemáticas.

LOS AUTORES

# Conoce tu libro

Esta parte se destina a presentar uno de los contenidos estudiados en el bloque, en el contexto de la evolución histórica de las matemáticas.

**Proyecto del bloque**  
Son propuestas de tareas que se refieren a situaciones cotidianas, en cuya realización podrás aplicar tanto tus conocimientos previos como los adquiridos en el bloque.

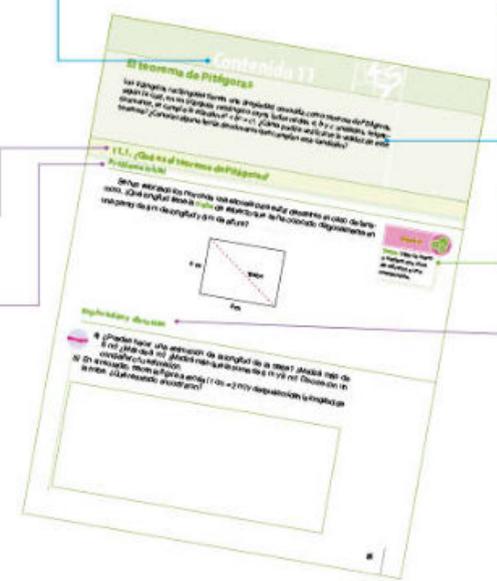


**Entrada del bloque**  
Aquí se presentan el número del bloque y los aprendizajes que debes lograr.

**Contenidos**  
Se relacionan con el programa a través de una serie de lecciones. (Una lección está pensada para que se estudie en una clase, aunque en ocasiones será necesario un poco más de tiempo.)

**Número y nombre de la lección**

**Problema Inicial**  
Es el problema o actividad con que empieza la lección. Su intención es ayudarte a recordar lo que ya sabes, a analizar lo que vas a aprender y a buscar nuevas estrategias de solución.

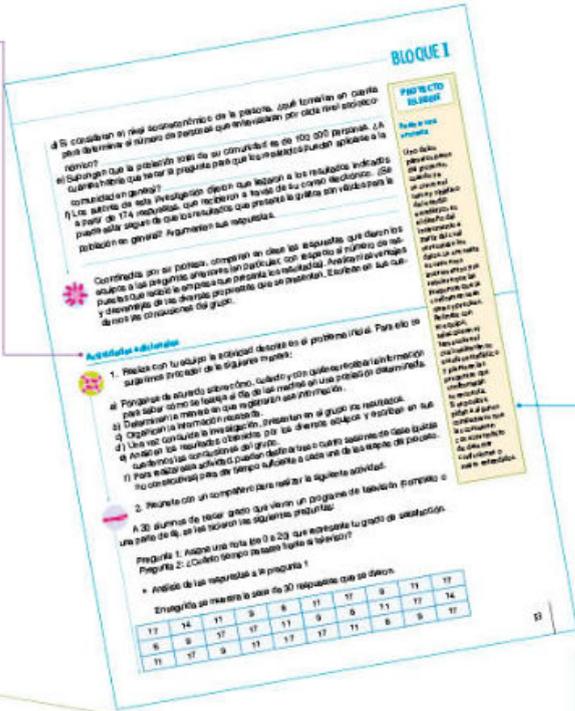


**Presentación del contenido**  
En esta sección se presentan problemas o situaciones que podrás resolver con tus propios recursos.

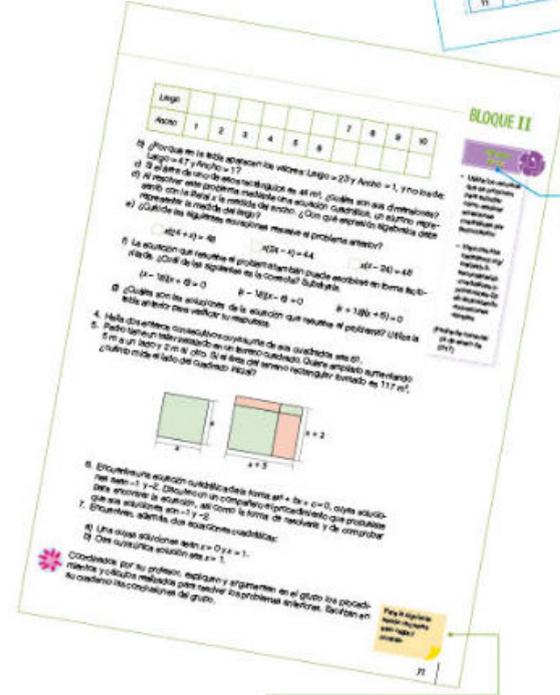
**Glosario.** Explicación del significado de palabras que pueden resultar de difícil comprensión. Si algunas de esas palabras no aparecen en el Glosario, te sugerimos consultar el diccionario.

**Exploración y discusión**  
Mediante algunas preguntas, esta sección te orienta en la búsqueda de procedimientos formales de solución al problema inicial. Podrás contestar estas preguntas individualmente o junto con uno o varios compañeros. Por lo general, las conclusiones que obtengan serán discutidas en todo el grupo.

**Actividades adicionales**  
Cada lección termina con actividades en las que podrás aplicar en otros contextos lo aprendido. En ocasiones, estas actividades abordan el mismo contexto pero con mayor grado de complejidad.



**Proyecto del bloque**  
A lo largo del bloque, en algunas lecciones, se proponen actividades que te orientarán para ir desarrollando el proyecto.



**Usemos las TIC** Son sugerencias para que realices actividades en diferentes sitios de internet.

Indicaciones para el material que debes llevar al salón la siguiente clase.

Iconos de organización del trabajo en clase

PAREJAS

EQUIPO

GRUPAL

CALCULADORA

TECNOLOGÍA



<b>BLOQUE II</b>	<b>65</b>	<b>Contenido 18.</b> Gráficas de funciones cuadráticas	<b>128</b>
<b>Proyecto del bloque.</b> Elaborar diseños geométricos	<b>65</b>	<b>18.1.</b> Interpretación de gráficas de funciones cuadráticas, 128.	
<b>Contenido 8.</b> Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas	<b>66</b>	<b>Contenido 19.</b> Interpretación de gráficas formadas por secciones rectas y curvas	<b>132</b>
<b>8.1.</b> Resolución por factorización (1), 66. <b>8.2.</b> Resolución por factorización (2), 68.		<b>19.1.</b> Gráficas de segmentos de recta, 132. <b>19.2.</b> Gráficas formadas por secciones rectas y curvas, 135.	
<b>Contenido 9.</b> Propiedades de los movimientos en el plano	<b>72</b>	<b>Contenido 20.</b> Eventos de azar independientes	<b>140</b>
<b>9.1.</b> Simetrías, 72. <b>9.2.</b> Simetría y triángulos, 75. <b>9.3.</b> Traslaciones, 77.		<b>20.1.</b> Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de eventos independientes, 140.	
<b>Contenido 10.</b> Construcción de diseños mediante movimientos en el plano	<b>79</b>	<b>Evaluación</b>	<b>143</b>
<b>10.1.</b> ¿Qué transformaciones geométricas se utilizaron?, 79. <b>10.2.</b> Diseños geométricos con transformaciones geométricas, 81. <b>10.3.</b> Tesislaciones y movimientos en el plano, 83.		<b>Evaluación tipo PISA</b>	<b>146</b>
<b>Contenido 11.</b> El teorema de Pitágoras	<b>85</b>	<b>Autoevaluación</b>	<b>148</b>
<b>11.1.</b> ¿Qué es el teorema de Pitágoras?, 85.			
<b>Contenido 12.</b> Uso del teorema de Pitágoras	<b>89</b>		
<b>12.1.</b> Problemas sobre el teorema de Pitágoras, 89.			
<b>Contenido 13.</b> Problemas sobre cálculo de la probabilidad de eventos	<b>92</b>		
<b>13.1.</b> Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes, 92. <b>13.2.</b> Cálculo de la probabilidad de eventos complementarios, 95.			
<b>Evaluación</b>	<b>97</b>		
<b>Evaluación tipo PISA</b>	<b>100</b>		
<b>Autoevaluación</b>	<b>102</b>		
		<b>BLOQUE IV</b>	<b>149</b>
<b>BLOQUE III</b>	<b>103</b>	<b>Proyecto del bloque.</b> Medir alturas de modo indirecto	<b>149</b>
<b>Proyecto del bloque.</b> Medir distancias y alturas inaccesibles	<b>103</b>	<b>Contenido 21.</b> Sucesiones	<b>150</b>
<b>Contenido 14.</b> La fórmula general cuadrática	<b>104</b>	<b>21.1.</b> Patrones numéricos y de figuras, 150. <b>21.2.</b> Generando sucesiones, 154. <b>21.3.</b> Simbolización de sucesiones, 157. <b>21.4.</b> Actividades sobre patrones numéricos y de figuras, 160.	
<b>14.1.</b> Aplicación de la fórmula general, 104. <b>14.2.</b> Discriminante y número de raíces, 107. <b>14.3.</b> Actividades sobre resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas, 109.		<b>Contenido 22.</b> Sólidos con superficies curvas	<b>162</b>
<b>Contenido 15.</b> Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos	<b>111</b>	<b>22.1.</b> Generación del cilindro, del cono y de la esfera, 162. <b>22.2.</b> Desarrollos planos de cilindros y conos rectos, 165.	
<b>15.1.</b> Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, 111. <b>15.2.</b> Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos, 114.		<b>Contenido 23.</b> Relación entre la pendiente de una recta y la razón tangente	<b>169</b>
<b>Contenido 16.</b> Teorema de Tales	<b>116</b>	<b>23.1.</b> La razón tangente, 169.	
<b>16.1.</b> ¿Qué es el teorema de Tales?, 116. <b>16.2.</b> Actividades sobre el teorema de Tales y su recíproco, 120.		<b>Contenido 24.</b> Razones trigonométricas	<b>173</b>
<b>Contenido 17.</b> Homotecia	<b>122</b>	<b>24.1.</b> Las razones seno, coseno y tangente, 173.	
<b>17.1.</b> Figuras semejantes en cascada: homotecias, 122. <b>17.2.</b> Actividades sobre homotecia, 126.		<b>Contenido 25.</b> Uso de las razones trigonométricas	<b>177</b>
		<b>25.1.</b> Cálculo de un lado de un triángulo rectángulo, 177. <b>25.2.</b> Cálculo de un ángulo de un triángulo rectángulo, 179.	
		<b>Contenido 26.</b> Razón de cambio	<b>182</b>
		<b>26.1.</b> ¿Cómo cambian las cosas?, 182. <b>26.2.</b> Los fenómenos se comparan con razones, 186. <b>26.3.</b> ¿Cuál de los dos cambia más rápidamente?, 190.	
		<b>Contenido 27.</b> Medidas de dispersión de datos	<b>194</b>
		<b>27.1.</b> La dispersión de datos. El rango y la desviación media, 194.	
		<b>Evaluación</b>	<b>198</b>
		<b>Evaluación tipo PISA</b>	<b>201</b>
		<b>Autoevaluación</b>	<b>202</b>

<b>BLOQUE V</b>	<b>203</b>
<b>Proyecto del bloque.</b> Construir recipientes de diferentes formas y capacidades	<b>203</b>
<b>Contenido 28.</b> Resolución de problemas mediante ecuaciones	<b>204</b>
<b>28.1.</b> Resolución de problemas con ecuaciones lineales, 204. <b>28.2.</b> Resolución de problemas con ecuaciones lineales y cuadráticas, 208.	
<b>Contenido 29.</b> Secciones planas de cilindros y conos. Problemas de variación	<b>211</b>
<b>29.1.</b> Secciones planas de cilindros y conos, 211. <b>29.2.</b> Variación del radio de los círculos en cilindros y conos, 213.	
<b>Contenido 30.</b> Fórmulas del volumen de cilindros y conos	<b>217</b>
<b>30.1.</b> Volumen de cilindros, 217. <b>30.2.</b> Volumen de conos, 219.	
<b>Contenido 31.</b> Cálculo del volumen de cilindros y conos	<b>221</b>
<b>31.1.</b> Volumen de cilindros y conos, 221.	
<b>Contenido 32.</b> Relación entre la fórmula de una función y su representación gráfica	<b>224</b>
<b>32.1.</b> Variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades, 224. <b>32.2.</b> Actividades sobre variación lineal o cuadrática, 228.	
<b>Contenido 33.</b> Juegos de azar	<b>230</b>
<b>33.1.</b> Reconocimiento de juegos justos, 230. <b>33.2.</b> Cómo se vuelve equitativo un juego de azar, 234. <b>33.3.</b> Los premios de los juegos de azar, 237.	
<b>Evaluación</b>	<b>239</b>
<b>Evaluación tipo PISA</b>	<b>243</b>
<b>Autoevaluación</b>	<b>248</b>

<b>APÉNDICES</b>	<b>249</b>
<b>Construcciones geométricas con ayuda del programa GeoGebra</b>	<b>249</b>
<b>Tabla de razones trigonométricas</b>	<b>257</b>
<b>Sugerencias didácticas y de dosificación</b>	<b>258</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>268</b>
<b>Créditos iconográficos</b>	<b>272</b>

## ¿Para qué puede ser útil la estadística?

Los gobiernos recopilan y analizan una gran cantidad de información estadística, como en los censos. En nuestro país, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) se encarga de realizar cada 10 años un censo de población y vivienda, el último de los cuales ocurrió en 2010. Para darnos una idea de la información que aportó este censo, imaginemos que en este momento pudiéramos encoger la población de la República Mexicana hasta reducirla al tamaño de un pueblo de 100 personas, manteniendo todas las proporciones humanas existentes. El resultado sería el siguiente:



*El 25 de enero de 1983 se creó, por decreto presidencial, el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (Inegi). Es responsable de captar, procesar y difundir información acerca del territorio, la población y la economía de nuestro país.*

*Desde 1985, el Instituto se desconcentró para ubicar su sede en la ciudad de Aguascalientes, Aguascalientes.*

- Habría 51 mujeres y 49 hombres.
- No católicos: 16; católicos: 84.
- Analfabetos: 7.
- Hablantes de alguna lengua indígena: 7.
- Trabajadores en el sector informal: 29.
- Con alguna discapacidad física o mental: 5.
- Afiliados a una institución de salud: 54.
- Habitantes de viviendas carentes de agua entubada: 10.
- Con educación universitaria: 3.

Esto nos da un panorama del nivel de desarrollo alcanzado por nuestro país y de lo que aún nos falta por hacer.

### PROYECTO DEL BLOQUE

#### Realizar una encuesta

¿Qué tipos de actividades recreativas, deportivas y culturales realizas en tu tiempo libre? ¿A qué te vas a dedicar cuando termines la secundaria? ¿Vas a trabajar o a seguir estudiando? ¿Qué carrera piensas estudiar? Formen un equipo de cuatro integrantes para realizar una encuesta con todos los compañeros de tercer grado y presenten los resultados en el grupo. En este bloque estudiarás estadística en el contenido 7, el cual te ayudará a desarrollar el proyecto.

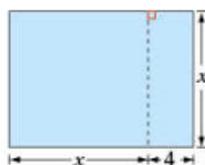
## Ecuaciones cuadráticas

En un problema se trata de calcular la medida del lado de un jardín público de forma cuadrada, cuyos andadores tienen un área total de  $420 \text{ m}^2$ , y sus áreas verdes cubren una superficie de  $5\,980 \text{ m}^2$ . ¿Qué expresión algebraica se podría utilizar para representar esta situación y resolverla?

### 1.1. Resolución informal de ecuaciones cuadráticas (1)

#### Problema inicial

El área de un rectángulo es de  $117 \text{ cm}^2$ . El largo mide  $4 \text{ cm}$  más que el ancho. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo? \_\_\_\_\_



#### Exploración y discusión

a) ¿Cómo resolverías este problema? \_\_\_\_\_

¿Qué solución encontraste? \_\_\_\_\_

¿Cómo verificarías que tu respuesta es correcta? \_\_\_\_\_

Discute tus respuestas con un compañero.

b) En la siguiente tabla, registren los resultados que obtengan al resolver el problema por tanteo. En ella pueden asignar valores al ancho del rectángulo y calcular el largo para obtener el área.

Ancho				
Largo				
Área				

c) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que su área sea  $117 \text{ cm}^2$  y se cumplan las condiciones del problema? \_\_\_\_\_

d) En el siguiente recuadro, escriban una ecuación que represente esta situación.

e) ¿Qué procedimiento utilizan para resolver esa ecuación? \_\_\_\_\_

f) ¿Qué representa la solución de esa ecuación? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expongan, comparen y argumenten en el grupo las expresiones algebraicas de las ecuaciones, los cálculos y procedimientos empleados por los equipos para resolver este problema, y las ventajas y desventajas que tiene cada uno de los procedimientos de solución empleados (el de tanteo y el algebraico). Si es necesario, corrijan las ecuaciones y/o los procedimientos que escribieron en los incisos d) y e).

#### Actividades adicionales

1. El área de un rectángulo es  $98 \text{ cm}^2$ . La medida del largo es el doble de la del ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

a) En el siguiente recuadro, traza un rectángulo cuyo largo sea el doble del ancho. Anota en sus lados la representación algebraica de sus medidas.

b) ¿Qué expresión algebraica representa su área?

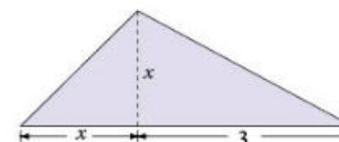
c) Escribe la ecuación que modela esta situación.



d) ¿Qué procedimiento puedes utilizar para resolver esa ecuación? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero para llegar a un acuerdo.

e) En el contexto que se plantea, ¿qué representa la solución de esa ecuación?

2. El área del triángulo de la figura es  $54 \text{ cm}^2$ . ¿Cuáles son sus dimensiones?



a) ¿Cómo resolverían este problema? ¿Qué solución encontraron? ¿Cómo **verificarían** que su respuesta es correcta?

b) ¿Con qué expresión algebraica puede representarse el área del triángulo?

c) Escriban una ecuación que represente esta situación.

d) ¿Qué procedimiento utilizan para resolver esa ecuación?

e) En el contexto del problema, ¿qué representa la solución de esa ecuación?



Con la ayuda de su profesor, expongan en el grupo los procedimientos utilizados por los equipos para resolver los dos problemas anteriores.

#### Glosario

**Verificar.** Comprobar la verdad o la exactitud de un resultado.



3. Completen la siguiente tabla. Si lo consideran necesario, utilicen su calculadora. Justifiquen sus respuestas.

Problemas	Ecuaciones	Soluciones
El cuadrado de un número es 100. ¿Cuál es el número?		
El cuadrado de un número menos 8 es igual a 73. ¿Cuál es el número?		
	$x^2 + 2x = 63$	
	$x(x + 1) = 342$	

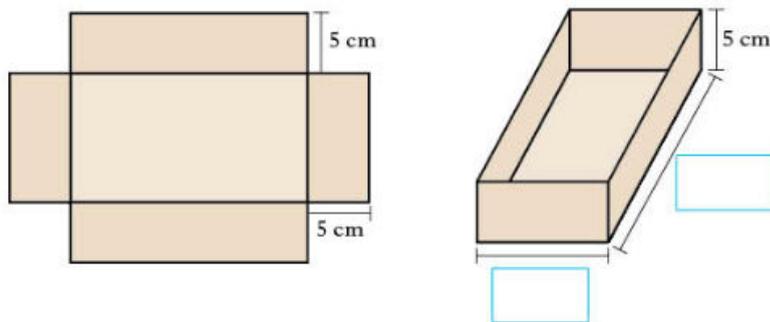


Con el apoyo de su profesor, expongan sus respuestas en el grupo. Expliquen los procedimientos empleados para resolver las ecuaciones obtenidas y para escribir un problema para una ecuación dada. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

### 1.2. Resolución informal de ecuaciones cuadráticas (2)

#### Problema inicial

El área de la superficie total de una caja de cartón abierta es de  $380 \text{ cm}^2$ . Mide  $4 \text{ cm}$  más de largo que de ancho, y su altura es de  $5 \text{ cm}$ . ¿Cuánto mide de largo y de ancho?



#### Exploración y discusión

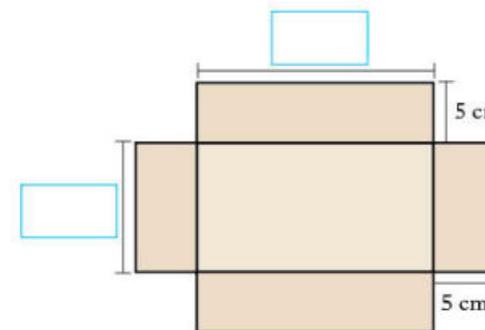
- a) ¿Cómo resolverías este problema? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Qué datos de la situación tomarías en cuenta para hacerlo? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cómo verificarías que tu respuesta es correcta? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
- b) Si el ancho de la caja midiera  $7 \text{ cm}$ , ¿cuánto mediría de largo? \_\_\_\_\_  
 ¿Cuál sería el área de la base? \_\_\_\_\_ ¿Cuál sería el área de cada una

de las cuatro caras? \_\_\_\_\_ ¿Cuál sería la suma de las áreas de las cinco regiones? \_\_\_\_\_

c) En la siguiente tabla, registra los resultados que obtengas al resolver el problema por tanteo; en ella puedes asignar valores al ancho de la caja para calcular el largo y el área total de la caja.

Dimensiones de la caja			Áreas de las caras y la base					Área total
Ancho	Largo	Altura	Cara 1	Cara 2	Cara 3	Cara 4	Base	

- d) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que su área total sea de  $380 \text{ cm}^2$ ? \_\_\_\_\_
- e) Si designas con la literal  $x$  el ancho de la caja, ¿cómo se representa el largo? \_\_\_\_\_  
 ¿Y el área de la base? \_\_\_\_\_ ¿Y el área de cada una de las cuatro caras? \_\_\_\_\_  
 Anota toda esta información en la plantilla de la caja que se muestra a continuación.



Reúnete con un compañero y contesten:

- f) ¿Qué ecuación permite hallar el largo y el ancho de la caja? \_\_\_\_\_  
 g) ¿Cómo se obtuvo esa ecuación? \_\_\_\_\_  
 h) ¿Cuál es la solución de esa ecuación? \_\_\_\_\_  
 i) En el **contexto** de la situación que se plantea, ¿qué representa la solución de esa ecuación? \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo sus propuestas de solución al problema. Los equipos deberán exponer las razones en que basan sus respuestas. Anoten las conclusiones del grupo.

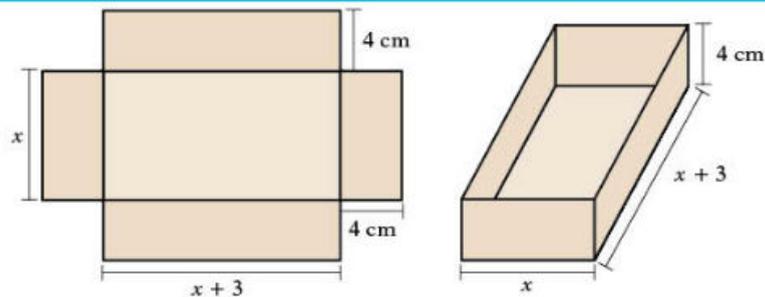


#### Glosario

**Contexto.** Entorno físico o de situación de cualquier tipo en el cual se considera un hecho.

Actividades adicionales

1. A la derecha se muestra la plantilla de otra caja. En ella, el largo mide 3 cm más que el ancho, su altura es de 4 cm y su área total es de 396 cm<sup>2</sup>. La ecuación que permite hallar las medidas de su ancho y largo es  $x^2 + 19x + 24 = 396$ .



- ¿Cómo se obtuvo esa ecuación?
- ¿Qué procedimiento puedes utilizar para resolverla?
- Asignamos valores a la literal  $x$  y evaluamos la expresión hasta que su valor sea 396. ¿Puede ser 10 el valor de  $x$ ? ¿Qué valor de  $x$  hace que  $x^2 + 19x + 24$  sea igual a 396?

Una *ecuación cuadrática* es una ecuación en la que una de las variables es de segundo grado, como  $x^2 + 19x + 24 = 396$ .

- ¿Cuál es la solución de la ecuación cuadrática  $x^2 + 19x + 24 = 396$ ?
- En el contexto de la situación que se plantea, ¿qué representa la solución de esta ecuación?
- ¿Cuáles son las dimensiones de esa caja?



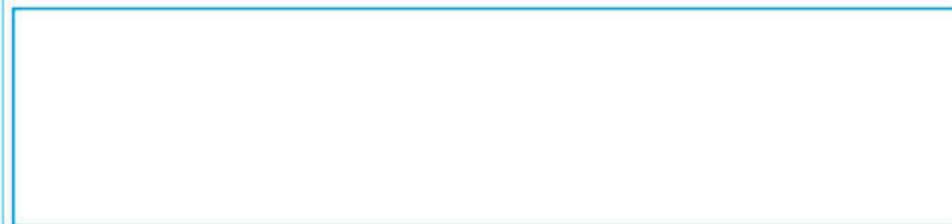
2. Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

- El área de un tarjetón cuadrado es 144 cm<sup>2</sup>.
  - ¿Cuánto mide por lado el tarjetón? ¿Cómo encuentran este resultado? ¿Cómo verifican que el resultado encontrado es correcto?
  - Si representan con  $x^2$  el área del tarjetón, ¿cómo representan la medida del lado?
  - ¿Qué ecuación representa esta situación?
- Tengo  $x$  bolsas con  $x$  canicas cada una. Voy a regalar 36 canicas y me van a quedar 364.
  - ¿Cuántas bolsas tengo y cuántas canicas tiene cada una? ¿Cómo encuentran este resultado? ¿Cómo verifican que el resultado encontrado es correcto?
  - Si son  $x$  bolsas y en cada una hay  $x$  canicas, ¿cómo representan algebraicamente el total de canicas?
  - ¿Cómo representan algebraicamente las canicas que quedan cuando se regalan 36 canicas?
  - ¿Qué ecuación representa esta situación?
  - En esa ecuación la incógnita tiene dos significados. ¿Cuáles son?

c) Juan tiene un terreno cuadrado dividido en dos franjas rectangulares. Una de ellas mide 20 m de ancho y la usa como estacionamiento. En la otra franja está

construyendo unos departamentos. Si el área destinada a los departamentos mide 3500 m<sup>2</sup>, ¿cuánto mide por lado el terreno?

- En el siguiente recuadro, tracen un croquis del terreno cuadrado, dividido en las dos franjas rectangulares.



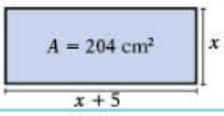
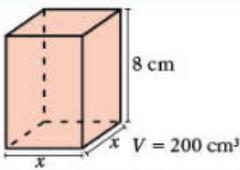
- ¿Qué tomarán en cuenta para hallar las dimensiones de cada franja? ¿Cuáles son esas dimensiones? ¿Cómo verifican que su respuesta es correcta?
- Si el terreno cuadrado mide  $x$  metros por lado, ¿cómo expresan algebraicamente su área? ¿Cómo expresan algebraicamente las dimensiones de los rectángulos en que está dividido el cuadrado? Anoten sus respuestas en el croquis anterior.
- ¿Qué ecuación representa la situación del área destinada a los departamentos?

3. Escriban una ecuación que represente cada una de las siguientes situaciones. Resuélvanlas con el procedimiento que deseen.

- Estoy pensando en un número. Si lo elevo al cuadrado y al resultado le resto 3 veces el número que pensé, el valor que obtengo es 9 veces el número que pensé. ¿Cuál es el número?
- Estoy pensando en un número. Si le resto 7 y el resultado lo elevo al cuadrado, obtengo 100. ¿De qué número se trata?



4. Planteen una ecuación que represente cada una de las siguientes situaciones. Resuélvanlas. Utilicen su calculadora si es necesario.

	Ecuación	Solución
a) 		
b) 		

5. Luis dice que para cualquier valor entero de  $x$ , el valor de la expresión  $x^2 - 12x + 36$  será siempre diferente de cero. ¿Tiene razón Luis? Justifiquen su respuesta.



Coordinados por su profesor, compartan sus respuestas a las cinco actividades anteriores con los demás equipos del grupo. En caso de que tengan diferencias de opinión, propongan argumentos suficientes para respaldar sus afirmaciones. Anoten las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



- Observa el video "Ecuaciones cuadráticas" y recuerda qué es una ecuación cuadrática y cuántas soluciones tiene:

– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/2/0>

- Utiliza los recursos que se proponen para conocer algunas estrategias para resolver problemas que impliquen ecuaciones cuadráticas:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-se-cundaria/eb-ecuaciones-cuadraticas>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás y tijeras.

## Construcción de figuras congruentes y figuras semejantes

Elena fue a la "Casa de los espejos" y se vio reflejada en imágenes cómicas en varios de ellos. Elena se pregunta: "¿Qué hace que dos imágenes sean algunas veces iguales, y otras, diferentes?"

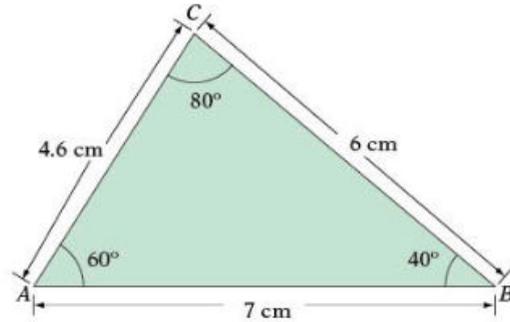
**Te recomendamos la lectura**

"Figuras semejantes", en Hernández Garcíadiego, C., *La geometría en el deporte*, México, Santillana, 2002.

### 2.1. Figuras congruentes y figuras semejantes

#### Problema inicial

A Leticia le encargaron que avisara por teléfono a sus compañeros de grupo, que llevaran al día siguiente un triángulo de cartoncillo, igual al que se muestra en la siguiente figura.



Por alguna razón, a todos les dio incompleta la información; sólo les dijo: "Los ángulos del triángulo miden 60°, 40° y 80°". ¿Con esta información es posible construir el triángulo solicitado? Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión

a) ¿Cómo podrían ser los triángulos que hicieron los compañeros de Leticia? Usa regla y compás para trazar un triángulo en un trozo de cartoncillo, con las medidas que se indican enseguida:

$$\sphericalangle A = 60^\circ$$

$$\sphericalangle B = 40^\circ$$

$$\sphericalangle C = 80^\circ$$

b) Recorta el triángulo y compáralo con el de un compañero. ¿Tienen el mismo tamaño? \_\_\_\_\_ ¿Tienen la misma forma? \_\_\_\_\_

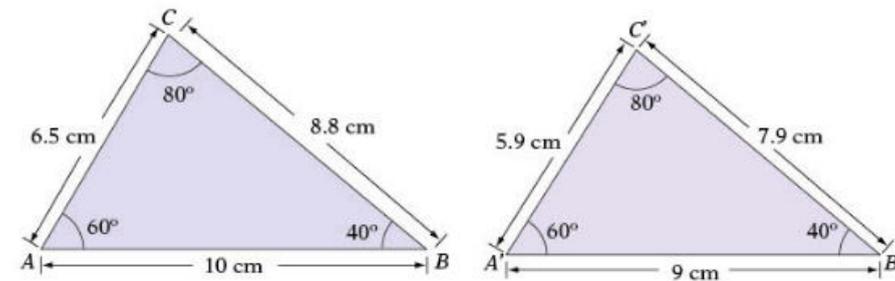
c) ¿Cuántos triángulos diferentes, aunque con la misma forma, pueden trazarse sabiendo que sus ángulos miden  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 40^\circ$  y  $\sphericalangle C = 80^\circ$ ? \_\_\_\_\_

Los triángulos que pueden trazarse conociendo únicamente las medidas de sus tres ángulos se llaman *triángulos semejantes*. Es como si uno fuera ampliación o reducción de otro, de manera que cada lado o ángulo de uno corresponde a un lado o ángulo del otro. A esas partes que se corresponden se les llama partes homólogas: *lados homólogos*, *ángulos homólogos*.

d) Si uno de los compañeros de Leticia hubiera trazado un triángulo exactamente igual al que se había pedido, ¿esos dos triángulos serían semejantes? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

Los triángulos que al superponerse coinciden en todas sus partes se llaman *triángulos congruentes*.

e) Supongan que dos de los triángulos semejantes contruidos por los compañeros de Leticia fueron los siguientes:



¿Hay alguna relación entre las medidas de los lados homólogos? Completen la siguiente tabla con las medidas de los lados de cada triángulo y las razones entre los lados homólogos.

Triángulo ABC	Medida de los lados			Razones entre los lados homólogos		
	AB =	AC =	BC =	$\frac{AB}{A'B'}$ =	$\frac{AC}{A'C'}$ =	$\frac{BC}{B'C'}$ =
Triángulo A'B'C'	A'B' =	A'C' =	B'C' =			

f) ¿Qué relación hay entre las razones de lados homólogos de estos triángulos semejantes? \_\_\_\_\_

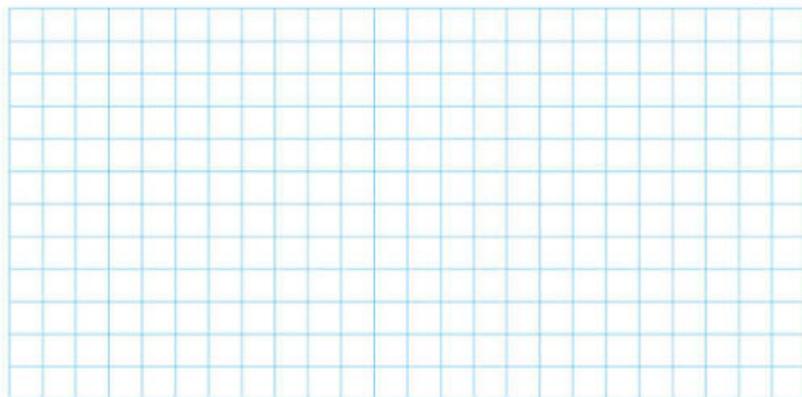
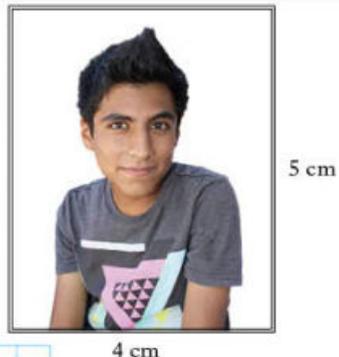


Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo las respuestas de los equipos a las preguntas anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

1. Quiero ampliar una fotografía de 4 cm por 5 cm, de modo que el lado homólogo al que mide 4 cm mida 6 cm. ¿Cuánto debe medir el otro lado?

- El lado homólogo al de 4 cm debe medir 6 cm, es decir, debe ser 2 cm mayor. ¿Deberá medir 7 cm el lado homólogo al de 5 cm? Explica tus argumentos por los que estás de acuerdo o en desacuerdo con esta propuesta.
- Usa la siguiente cuadrícula para trazar dos rectángulos: el correspondiente al tamaño de la fotografía original y el de la ampliación que se pide.



- ¿Qué puedes decir acerca de la forma de estas figuras? ¿Se parecen estos rectángulos?; es decir, ¿el segundo no se ve desproporcionado con respecto del primero?
- ¿Cuánto mide el lado homólogo al de 5 cm? Compara tu trabajo con el de un compañero. ¿Hay diferencias entre sus respuestas? ¿En qué argumentos te basas para afirmar que tu respuesta es correcta?
- ¿Cuál es la razón entre las medidas de los lados homólogos de ambas figuras?

Dos polígonos de igual número de lados son semejantes si tienen sus ángulos ordenadamente iguales y los lados correspondientes son proporcionales.  
La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es la razón de dos lados homólogos cualesquiera.

- ¿Son semejantes estas figuras? ¿Cuál es la razón de semejanza?
2. Ahora quiero ampliar la fotografía original (de 4 cm por 5 cm), de modo que el lado homólogo al que mide 4 cm mida 10 cm.
- ¿Cuánto debe medir el lado homólogo al de 5 cm?
  - ¿Cuál es la razón de semejanza entre ambas figuras?

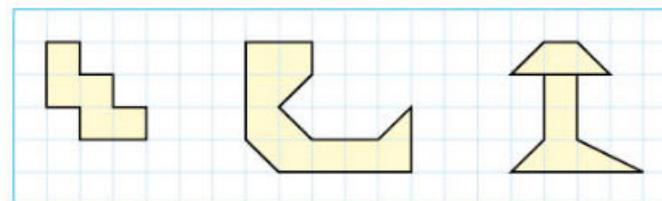
Con la ayuda de su profesor, presenten y argumenten en el grupo sus respuestas a las dos actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

3. Los cuadriláteros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son semejantes. Contesten las preguntas que se plantean sobre ellos.



- ¿Cuál es la razón de semejanza?
- ¿Qué tipo de cuadrilátero debe ser  $A'B'C'D'$ ?
- ¿Cuál es la medida del  $\angle D$ ? ¿Y la del  $\angle A$ ?
- ¿Cuál es la medida del lado  $BC$ ? ¿Y la del lado  $C'D'$ ? ¿Y la del lado  $DA$ ?
- ¿Cuál es el perímetro de cada cuadrilátero?
- ¿Cuál es la razón de los perímetros de estas figuras?
- Comparen la razón de los perímetros de estas figuras. ¿Qué relación hay entre esas razones? ¿Qué relación hay entre la razón de los perímetros de estas figuras y la razón de semejanza que hay entre ellos?

4. En hojas cuadrículadas, tracen polígonos que sean semejantes a los siguientes, de modo que la razón de semejanza sea  $\frac{1}{3}$ .



Presenten en el grupo los trazos realizados por los equipos y expongan las razones que sustentan su trabajo. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

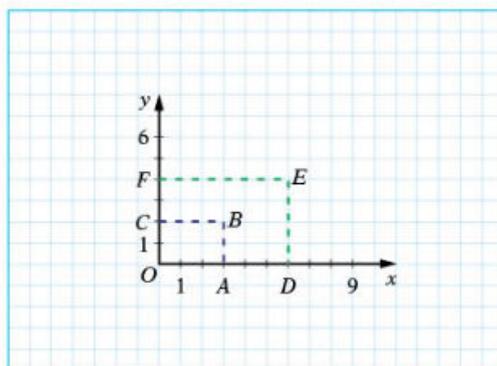
5. Contesten las preguntas que se plantean sobre cada pareja de figuras.

- Decidan si las siguientes parejas de polígonos son *siempre*, *algunas veces* o *nunca* semejantes. Expliquen los argumentos en que basan sus afirmaciones.
  - Dos triángulos equiláteros
  - Dos rombos
  - Dos triángulos rectángulos
  - Dos hexágonos regulares
  - Dos cuadrados
  - Un triángulo escaleno y un triángulo isósceles
  - Dos rectángulos
- En los ejemplos anteriores, ¿qué propiedad tienen los pares de figuras que son *siempre* congruentes?

Apoyados por su profesor, expongan en el grupo las conclusiones de los equipos sobre las similitudes y diferencias entre las figuras que son congruentes y las que son semejantes. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

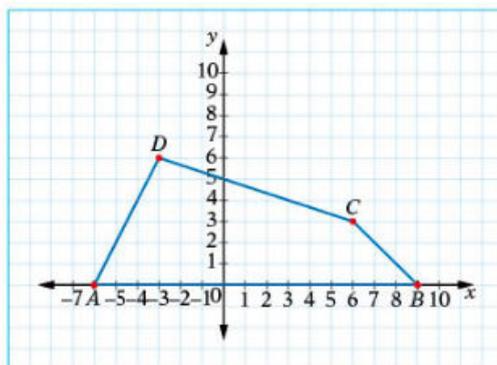
2.2. Actividades sobre polígonos semejantes

1. Analiza la siguiente figura, que muestra dos rectángulos con un vértice común, trazados sobre un plano cartesiano.



- ¿Son semejantes los rectángulos  $OABC$  y  $ODEF$ ? ¿En qué argumentos basas tu afirmación?
- Multiplica por 3 las coordenadas de los vértices del rectángulo  $OABC$ , localiza las nuevas coordenadas y traza el cuadrilátero correspondiente, que llamaremos  $OGHI$ .
- ¿El cuadrilátero  $OGHI$  es un rectángulo? ¿Es semejante al rectángulo  $OABC$ ? ¿Cuál es la razón de semejanza de estas figuras?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos  $O$ ,  $B$ ,  $E$  y  $H$ ? ¿Están alineados estos puntos?

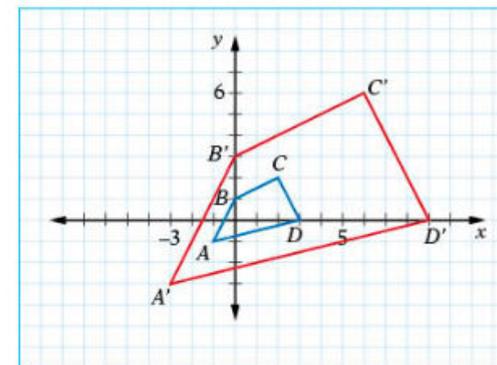
2. Analiza la siguiente figura, que muestra un cuadrilátero trazado sobre un plano cartesiano. Cópiala en papel cuadriculado.



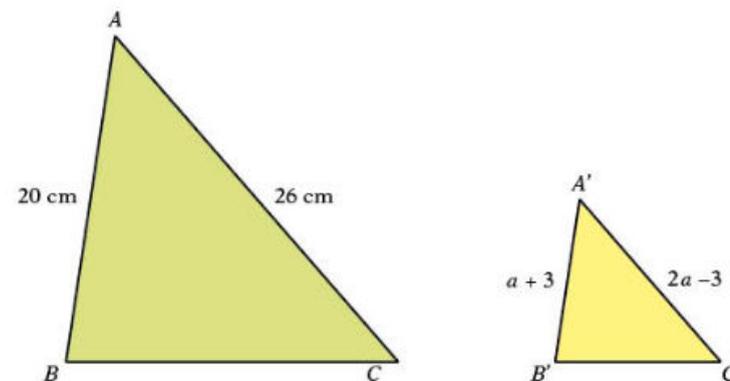
- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrilátero  $ABCD$ ?
- Multiplica las coordenadas de los vértices por  $\frac{2}{3}$ , localiza las nuevas coordenadas y traza el cuadrilátero correspondiente.

- ¿Qué fracción de las longitudes de los lados del cuadrilátero original son las longitudes de los lados del nuevo cuadrilátero?
- Multiplica ahora las coordenadas de los vértices del cuadrilátero  $ABCD$  por  $\frac{3}{4}$ , localiza las nuevas coordenadas y traza el cuadrilátero correspondiente.
- ¿Qué fracción de las longitudes de los lados del cuadrilátero original son las longitudes de los lados del nuevo cuadrilátero?
- Compara tus resultados con los que obtuvo un compañero. Discutan: ¿son semejantes estos tres cuadriláteros? ¿Por qué?

3. Los vértices del cuadrilátero  $ABCD$  son  $A(-1, -1)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(2, 2)$  y  $D(3, 0)$ .



- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrilátero  $A'B'C'D'$ ?
  - ¿Son semejantes los cuadriláteros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ ?
  - ¿Cuál es la razón de semejanza de estos cuadriláteros?
4. Los siguientes triángulos son semejantes. ¿Cuánto miden los lados  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{A'C'}$  del triángulo  $A'B'C'$ , los cuales son homólogos a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  del triángulo  $ABC$ ?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cuándo dos figuras son congruentes y cuándo son semejantes:

- <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-transformaciones-congruencia-y-semejanza/eb-congruencia-y-semejanza/e/exploring-rigid-transformations-and-congruence-and-congruence-y-semejanza/eb-congruencia-y-semejanza/e/exploring-rigid-transformations-and-congruence-y-semejanza/e/exploring-angle-preserving-transformations-and-similarity>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás y cartulina.

## Criterios de congruencia y de semejanza de triángulos

¿Cómo podrías elaborar una réplica exacta, o al menos parecida, del banderín triangular de tu equipo favorito? ¿Qué medidas del banderín original debes conocer como mínimo, para hacer uno idéntico a él? ¿Y para hacerlo parecido?

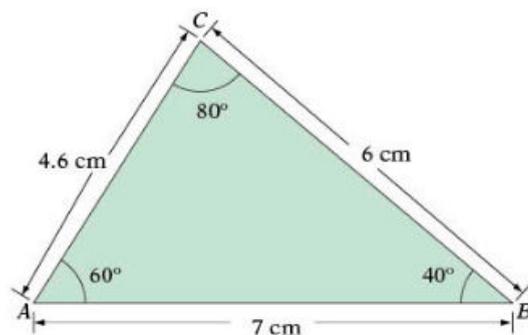
**Te recomendamos la lectura**

"Criterios de congruencia de triángulos", en Hernández Garcíadiego, C. *La geometría en el deporte*, México, Santillana, 2002.

### 3.1. Criterios de congruencia de triángulos

#### Problema inicial

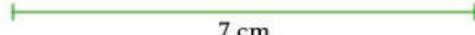
En el contenido anterior nos enteramos de que a Leticia le encargaron avisar a sus compañeros de grupo que llevaran un triángulo de cartoncillo igual al de la figura.



Supongamos que sólo les hubiera dicho: "Los lados del triángulo miden 4.6 cm, 6 cm y 7 cm". ¿Con esta información es posible construir el triángulo solicitado? ¿Por qué?

#### Exploración y discusión

- ¿Cómo podrían ser los triángulos que elaboraron los compañeros de Leticia? ¿Tendrán la misma forma o serán diferentes?
- Usa regla, compás y cartulina para trazar tres triángulos con la información que se da enseguida.

Triángulo 1	 Los otros lados miden 4.6 cm y 6 cm
Triángulo 2	 Los otros lados miden 6 cm y 7 cm
Triángulo 3	 Los otros lados miden 7 cm y 4.6 cm

- Recorta los triángulos y compáralos sobreponiéndolos. ¿Son iguales o diferentes?
- ¿Cuántos triángulos diferentes pueden trazarse con los tres segmentos que miden 7 cm, 4.6 cm y 6 cm?
- ¿Cuántos triángulos diferentes pueden construirse conociendo las medidas de los tres lados?



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo los resultados que obtuvieron en esta actividad. **Formulen** una conclusión sobre la manera en que puede construirse un triángulo congruente a un triángulo dado.

#### Glosario

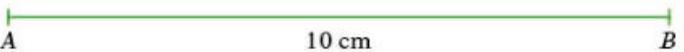
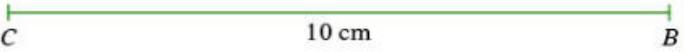
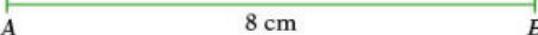
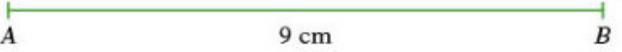
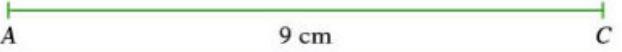
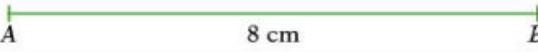
**Formular.** Reducir a términos claros y precisos una afirmación. Usar signos matemáticos para representar las relaciones entre las diferentes magnitudes de un enunciado.

#### Actividades adicionales

- Usa regla y compás para trazar un triángulo en tu cuaderno. Dos de sus lados deben ser iguales a los siguientes segmentos:



- Compara el triángulo que trazaste con el de un compañero. ¿Son iguales o diferentes?
  - ¿Cuántos triángulos distintos pueden trazarse conociendo las medidas de dos de sus lados?
- Con la información que se da en cada caso, cada uno construya un triángulo en su cuaderno; utilicen regla, compás y transportador. Después comparen sus respuestas.

Triángulo 1		$\sphericalangle A = 50^\circ$ $\sphericalangle B = 60^\circ$ $\sphericalangle C = 70^\circ$
Triángulo 2	  	$\sphericalangle A = 90^\circ$
Triángulo 3	 	$\sphericalangle A = 40^\circ$
Triángulo 4		$\sphericalangle B = 45^\circ$

- ¿En cuáles de los cuatro casos, los triángulos que construyeron fueron congruentes?

- b) ¿En cuáles de los cuatro casos es posible construir dos o más triángulos de diferente forma y tamaño?
- c) ¿Cuál es la información mínima que se requiere para construir triángulos congruentes?
- d) Lean la siguiente información y compárenla con la conclusión a que llegaron después de realizar las actividades anteriores.



• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar y analizar los criterios de congruencia de triángulos:

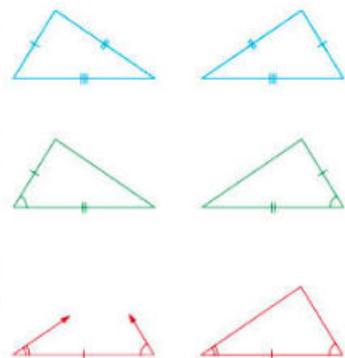
- <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-la-congruencia>
- [http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Triangulos\\_congruencia.html](http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Triangulos_congruencia.html)

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

En general, las figuras que son iguales (esto es, que tienen la misma forma y tamaño) se llaman *figuras congruentes*.

Hay tres criterios que permiten determinar si dos triángulos son congruentes:

1. Si cada lado de un triángulo mide lo mismo que el correspondiente de otro (criterio *LLL*: lado, lado, lado).
2. Si dos lados de un triángulo y el ángulo formado por éstos tienen la misma medida que los correspondientes del otro (criterio *LAL*: lado, ángulo, lado).
3. Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida que los correspondientes del otro (criterio *ALA*: ángulo, lado, ángulo).



- e) ¿En cuál de los cuatro casos, los triángulos trazados son congruentes por el criterio *LAL*? ¿Y en cuál caso son congruentes por el criterio *ALA*?
3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles son verdaderas? ¿En qué argumentos basan cada una de sus respuestas?

a) Dos triángulos congruentes tienen la misma área y el mismo perímetro.	Verdadero/Falso	Porque _____
b) Dos triángulos que no son congruentes pueden tener la misma área.	Verdadero/Falso	Porque _____
c) Dos triángulos que no son congruentes pueden tener el mismo perímetro.	Verdadero/Falso	Porque _____
d) Dos triángulos que no son congruentes pueden tener la misma área y el mismo perímetro.	Verdadero/Falso	Porque _____



Apoyados por su profesor, que el grupo:

- Discuta con argumentos sus respuestas a la actividad anterior.
- Presente ejemplos de pares de triángulos de los que puedan afirmar que son congruentes, tomando como base tres de sus medidas (ángulos, lados).
- Escriba en sus cuadernos las conclusiones obtenidas.

Para la siguiente sesión requieres traer regla, tijeras y calculadora.

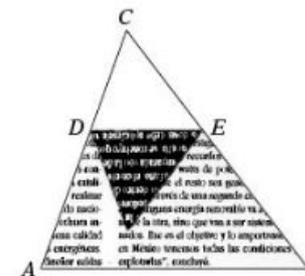
### 3.2. Criterios de semejanza de triángulos

#### Problema inicial

Toma un pedazo de papel y recorta un triángulo *ABC*. **Piega** la punta del vértice *C*, como en la figura, de manera que el doblez resulte paralelo al lado opuesto *AB*.



**Plegar.** Hacer pliegues o dobleces a una cosa.

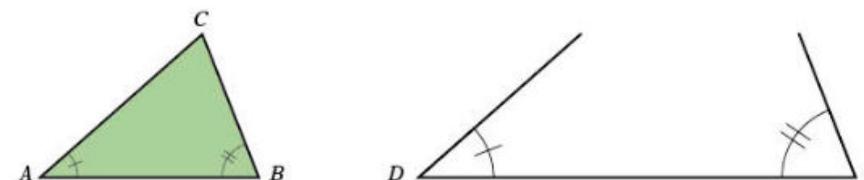


- ¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *DEC*? \_\_\_\_\_
- ¿Qué condiciones mínimas deben cumplir dos triángulos para que sean semejantes? Por ejemplo, ¿es suficiente con que los tres pares de lados homólogos sean proporcionales?; o bien, ¿es suficiente con que los tres pares de ángulos homólogos sean iguales? Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión

Veamos en primer lugar si dos triángulos son semejantes cuando los tres ángulos de uno son iguales a los homólogos del otro.

- a) Traza un triángulo *ABC* en tu cuaderno.
- b) Traza un segundo triángulo *DEF*, con  $\angle A = \angle D$  y  $\angle B = \angle E$ .



¿Son iguales el tercer par de ángulos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

- c) Mide las longitudes de los lados de los dos triángulos y, con la ayuda de una calculadora, encuentra y compara las razones de las longitudes de los lados homólogos.

$$\frac{AB}{DE} = \quad \frac{BC}{EF} = \quad \frac{AC}{DF} =$$



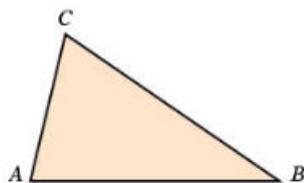
¿Son iguales estas razones? \_\_\_\_ ¿Las longitudes de los tres pares de lados son proporcionales? \_\_\_\_ Compara tus resultados con los obtenidos por un compañero. En caso de no coincidir, revisen las medidas y los cálculos para llegar a un acuerdo.

d) Construyeron dos triángulos cuyos tres pares de ángulos son iguales. ¿Son semejantes los triángulos  $ABC$  y  $DEF$ ? Escriban la conclusión acerca de los resultados de la investigación que realizaron y compárenla con la siguiente información. \_\_\_\_\_

Un criterio de semejanza de triángulos es  $AAA$ , es decir: cuando tres ángulos de un triángulo son iguales a tres ángulos de otro triángulo.

e) ¿Se podría asegurar que  $AA$  es también un criterio de semejanza de triángulos?; es decir, si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, ¿el tercer par de ángulos serán también iguales? \_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

f) Veamos ahora si dos triángulos son semejantes cuando los tres lados de uno son proporcionales a los tres lados del otro. Tracen un triángulo  $ABC$  en sus cuadernos.



g) Con regla y compás, tracen un segundo triángulo  $DEF$ , cuyas longitudes de los lados sean un múltiplo de las del triángulo original. (Los tres lados del segundo triángulo pueden medir dos, tres o cuatro veces lo que miden los lados del triángulo original.)

h) Midan con el transportador los ángulos homólogos de los dos triángulos. ¿Son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_

i) Construyeron dos triángulos cuyos tres pares de lados son proporcionales. ¿Son semejantes estos dos triángulos? Escriban la conclusión correspondiente a los resultados de la investigación que realizaron. \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, contesten en el grupo las siguientes preguntas:

- En el problema inicial, ¿se tienen tres pares de ángulos iguales? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles son? \_\_\_\_\_ ¿Qué argumentos permiten afirmar o negar que esos pares de ángulos son iguales? \_\_\_\_\_

- ¿Son semejantes los triángulos  $ABC$  y  $DEC$  del problema inicial? \_\_\_\_ ¿Qué criterio de semejanza permite afirmarlo? \_\_\_\_\_
- ¿Es  $LLL$  otro criterio de semejanza? \_\_\_\_\_ ¿Qué significa  $LLL$  en este caso? \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia hay entre el criterio de congruencia  $LLL$  y el de semejanza  $LLL$ ? \_\_\_\_\_

**Actividades adicionales**

1. En la sección *Exploración y discusión* encuentre dos criterios de semejanza de triángulos:  $AAA$  y  $LLL$ .

a) Se podría asegurar, asimismo, que  $ALA$  es un criterio de semejanza de triángulos? \_\_\_\_ ¿Qué argumentos darías para afirmarlo? \_\_\_\_\_

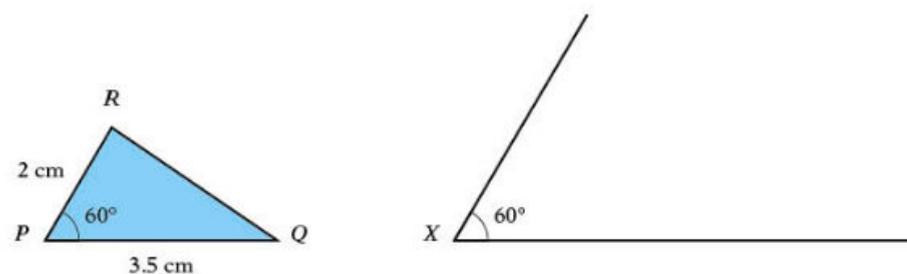


Discútelos con un compañero.

b) ¿Será  $AAL$  también un criterio de semejanza de triángulos? \_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

c) ¿Qué tienen en común las tres propuestas de criterios de semejanza de triángulos:  $AA$ ,  $ALA$  y  $AAL$ ? \_\_\_\_\_

2. ¿Es  $LAL$  un criterio de semejanza? Para averiguarlo, trata de construir un triángulo  $XYZ$  que no sea semejante al triángulo  $PQR$ , de modo que los lados que forman el ángulo de  $60^\circ$  sean proporcionales a los correspondientes del triángulo  $PQR$ .



a) ¿Qué resultado encontraste? \_\_\_\_\_ ¿Alguno de los triángulos que trazaste no es semejante al triángulo  $PQR$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

b) ¿Qué conclusión obtuviste después de realizar esta investigación? \_\_\_\_\_



• Observa el video "Semejanzas de triángulos" para explorar los criterios de semejanza de triángulos:

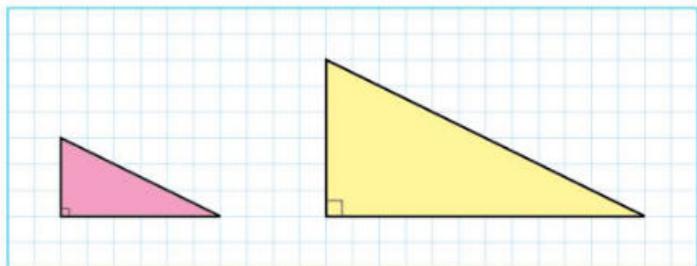
– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/2/1765>

• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar y analizar los criterios de semejanza de triángulos:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-semejanzas>

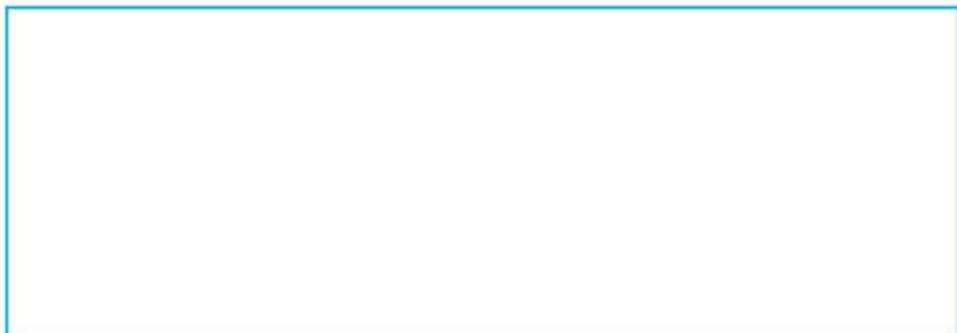
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

3. ¿Son semejantes dos triángulos rectángulos, cuyos lados que forman el ángulo recto son proporcionales? \_\_\_\_\_ ¿Qué criterio de semejanza permite asegurarlo y por qué? \_\_\_\_\_



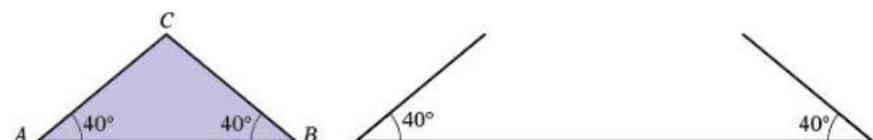
4. ¿Son semejantes todos los triángulos isósceles? \_\_\_\_\_ Si tienes dos triángulos isósceles, ¿puedes asegurar que los tres ángulos de uno de ellos son respectivamente iguales a los del otro? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Construye dos triángulos isósceles que no sean semejantes.

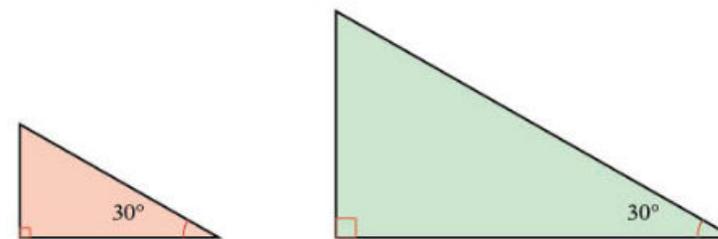


5. ¿Son semejantes todos los triángulos isósceles cuyos ángulos de la base miden  $40^\circ$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Trata de construir un triángulo que cumpla esta condición y que no sea semejante al  $\triangle ABC$ .



6. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo que mide  $30^\circ$ . ¿Son semejantes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

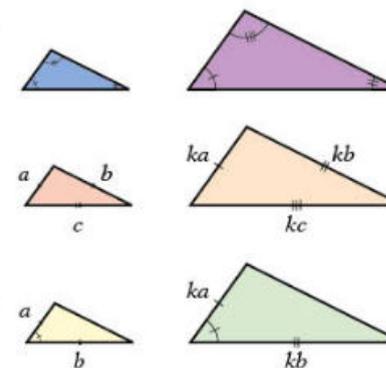


7. En resumen, ¿cuántos criterios de semejanza de triángulos hay? ¿Cuáles son? Discútelos con un compañero y anoten en sus cuadernos sus conclusiones. Después, comparen su propuesta con la siguiente información:

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Como en el caso de la congruencia de triángulos, existen **criterios** que permiten reducir las condiciones para garantizar la semejanza de triángulos. Tales criterios son:

- Criterio AAA. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos homólogos iguales.
- Criterio LLL. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales ( $k \neq 0$ ).
- Criterio LAL. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales ( $k \neq 0$ ).



**Glosario**

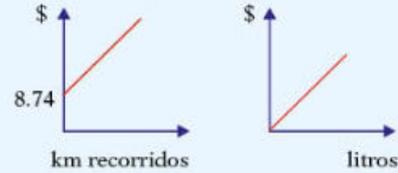
**Criterio.** Norma para juzgar la verdad o valor de una cosa. Norma para verificar una propiedad matemática: criterios de divisibilidad, criterios de congruencia, etcétera.

8. ¿Qué similitudes encuentran entre los criterios de semejanza y de congruencia de triángulos? \_\_\_\_\_ ¿Qué diferencias encuentran? \_\_\_\_\_
9. Si dos triángulos son congruentes, ¿son también semejantes? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
10. Si dos triángulos son semejantes, ¿son también congruentes? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

Coordinados por su profesor, expongan en el grupo las respuestas de los equipos a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Reconocimiento de situaciones de proporcionalidad

¿Qué tipo de relación existe entre los datos que muestra cada gráfica? ¿Por qué? ¿Es suficiente con que la representación gráfica de una situación sea una recta, para que corresponda a una relación de proporcionalidad?



Te recomendamos la lectura

"Descartes y las coordenadas", en De la Peña, J. A., *Geometría y el mundo*, México, Santillana, 2002.

### 4.1. Representaciones de relaciones de proporcionalidad

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Andrés atiende un negocio de tacos y jugos. Va de una mesa a otra anotando los pedidos de los clientes. La ilustración muestra seis órdenes que anotó en su libreta.

Orden	Tacos	Jugos	Total
1	4	2	\$ 34
2	1	1	\$ 11
3	3	-	\$ 18
4	4	1	
5	1	2	
6	5	3	

- ¿Cuánto cuesta cada taco? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto cuesta cada jugo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el costo de la orden número 4? \_\_\_\_\_ ¿Y el de la número 5? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden obtener el costo de la orden 6 a partir del costo de las órdenes 4 y 5? \_\_\_\_\_

e) Consideren los resultados que obtuvieron para completar las siguientes tablas.

Número de tacos (n)	Costo (c)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Número de jugos (n)	Costo (c)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

f) El costo de los tacos y su número son cantidades directamente proporcionales. ¿Por qué? \_\_\_\_\_

g) El costo de los jugos varía en proporción directa a su número. ¿Por qué? \_\_\_\_\_

h) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en cada caso? \_\_\_\_\_

i) A continuación aparecen algunas expresiones algebraicas. Anoten en el recuadro superior de cada tabla de la página anterior la expresión que le corresponda.

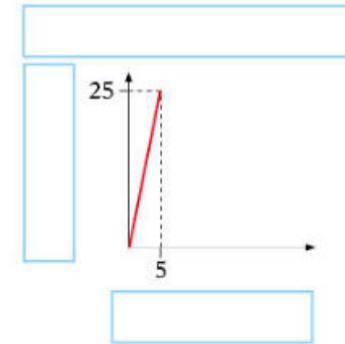
$c = 5n$

$c = 7n$

$c = 6n$

$c = 5.50n$

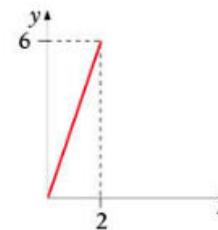
j) ¿A cuál de estas dos relaciones de proporcionalidad corresponde la siguiente gráfica? Complétela escribiendo los nombres de las variables en los ejes horizontal y vertical: "Costo de...", "Número de...".



k) Tracen en su cuaderno la gráfica de la otra relación de proporcionalidad.

2. La gráfica (a) y la tabla (b) siguientes corresponden a situaciones de variación proporcional directa.

a)



b)

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

Relacionen cada una de las siguientes situaciones con la representación que le corresponde (la gráfica o la tabla).

- ( ) Número de dulces de \$ 3 cada uno y costo total.
- ( ) Número de boletos que se pagan en una función de cine de dos por uno y número de personas que asisten.
- ( ) Número de yardas y número de pies.
- ( ) Número de vueltas completas del engrane A y número de vueltas completas del engrane B.
- ( ) Medida del lado de un triángulo equilátero y su perímetro.

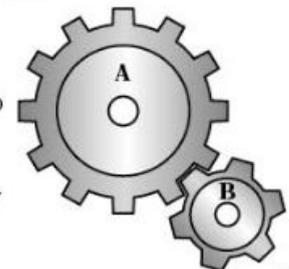
Usemos las TIC



• Observa el video "Movimiento rectilíneo uniforme" para reconocer situaciones de proporcionalidad:

– <http://ventana.televisiõneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/5/1379>

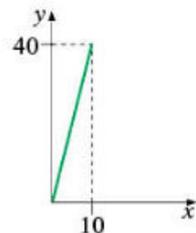
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)



3. Las situaciones que aparecen a la izquierda se refieren a cantidades que varían en proporción directa. Relacionen cada una de ellas con la expresión algebraica de la derecha que le corresponde.

- ( ) Medida del lado de un cuadrado y su perímetro      a)  $y = 4x$
- ( ) Medidas del radio y de la circunferencia
- ( ) Número de gatos y número de patas      b)  $y = 6.28x$

4. Analicen la gráfica de la derecha.

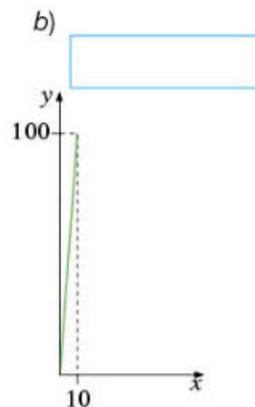
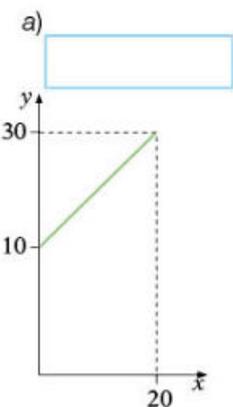


- a) ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando el de  $x$  es 1? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando el de  $x$  es 10? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando el de  $x$  es 1.5? \_\_\_\_\_
- d) Escriban en el recuadro una situación que se pueda representar con esta gráfica y la expresión algebraica que le corresponde.

e) Comprueben que los resultados que da la ecuación coinciden con los que muestra la gráfica. Por ejemplo, en la ecuación, ¿cuál es el valor de  $y$  cuando el de  $x$  es 5? \_\_\_\_\_ ¿Y cuando el valor de  $x$  es 10? \_\_\_\_\_

5. Analicen las siguientes gráficas.

- Relacionen las siguientes situaciones con la gráfica que le corresponde, anotándola como título de la gráfica.



- ( ) Relación entre las edades de María y Luis, si éste es 10 años mayor que María.
- ( ) Relación entre la distancia recorrida por un automóvil y los litros de gasolina que consume, si rinde 10 km por litro.

• ¿Cuál de las situaciones anteriores no es una relación de proporcionalidad directa? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Coordinados por su profesor, expongan y argumenten los cálculos y procedimientos realizados por los equipos en la resolución de estos problemas. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.



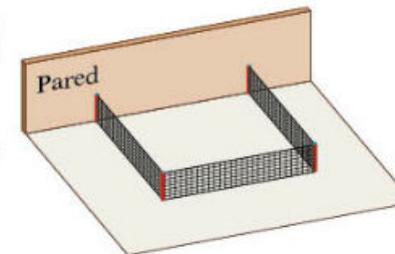
## Relaciones funcionales

Si se deja caer un objeto desde la azotea de un edificio, ¿de qué manera se relaciona la velocidad que adquiere el objeto con el tiempo transcurrido? Es decir, ¿de qué manera se relaciona el tiempo ( $t$ ) con la velocidad ( $v$ ) que alcanza el objeto?

### 5.1. Cantidades que varían en relación funcional

#### Problema inicial

Ernesto tiene 18 m de malla. Él desea cercar sólo tres lados de un terreno rectangular, ya que una pared sirve de límite del cuarto lado, como se muestra en la figura.



¿Qué dimensiones deberá tener el rectángulo para que dé el área máxima? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión

a) ¿Cómo podrías determinar cuál es el área máxima del terreno rectangular que puede cercarse con 18 m de malla? Escribe en el recuadro el procedimiento que utilizarías.

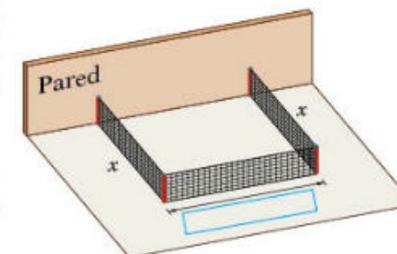
b) ¿El terreno puede medir 10 m de ancho? ¿Cuál es la mayor medida que puede tener la anchura? \_\_\_\_\_

c) Si Ernesto decidiera que el ancho del terreno debe ser de 3 m, ¿qué área se alcanzaría a cercar? \_\_\_\_\_

d) Si Ernesto decidiera que el terreno cercado debe tener un área de 28 m<sup>2</sup>, ¿qué anchura tendría el terreno? \_\_\_\_\_

e) Si se representa con la variable  $x$  la medida de la anchura del terreno rectangular, ¿cómo se representa la longitud?

¿Cómo se representa el área? \_\_\_\_\_  
Discute tu respuesta con un compañero.



f) En la primera columna de la siguiente tabla, escriban las expresiones algebraicas que corresponden a la longitud y al área del terreno. Después, completen la tabla para los valores de  $x$  que se dan.

Anchura ( $x$ )	1	2	3	4	5	6	7	8
Longitud _____								
Área $y =$ _____								

La tabla muestra que el valor de la variable  $y$  (área) depende del valor de la variable  $x$  (anchura). Esta relación determina una función.

Una *función* es una relación de dependencia entre dos variables, en la que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. En particular, se llama *función cuadrática* a una función del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde  $a$  es un número distinto de 0. Ejemplo:  $y = x^2 - 30x + 200$ .

La variable  $y$  es la variable dependiente y  $x$  es la variable independiente.

- g) Escriban la expresión algebraica que representa la función que relaciona el área ( $y$ ) del terreno cercado con la anchura ( $x$ ). \_\_\_\_\_ ¿La función que obtuvieron es lineal o cuadrática? Argumenten su respuesta. \_\_\_\_\_
- h) ¿Qué valores de  $x$  hacen que los de  $y$  aumenten? \_\_\_\_\_  
 ¿Qué valores de  $x$  hacen que los de  $y$  disminuyan? \_\_\_\_\_
- i) ¿Entre qué valores del ancho y el largo del terreno se halla el área máxima? Calculen esas medidas y exprésenlas hasta décimas de metro. \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo las respuestas que los equipos dieron a las cuestiones anteriores. Expliquen además la diferencia entre una función lineal y una cuadrática. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

1. Del par de variables relacionadas en cada uno de los siguientes casos, indica cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.

Situación	Independiente	Dependiente
a) El importe del recibo de la luz y el número de kilowatts-hora gastados.		
b) El radio de un círculo y el valor de su área.		
c) Un número entero y su cuadrado.		
d) El costo de una llamada telefónica y su duración.		
e) La distancia recorrida por un objeto y el tiempo invertido en recorrerla.		

2. Si se deja caer un objeto desde una altura de 2000 metros, la distancia ( $d$ ) que recorre depende del tiempo ( $t$ ) transcurrido (y no de la masa del objeto). La tabla muestra algunos ejemplos de la distancia recorrida, aproximadamente, como función del tiempo ( $d$  está dada en metros, y  $t$ , en segundos).

Tiempo ( $t$ )	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
Distancia ( $d$ )	0.0	5.0	20.0	45.0	80.0		

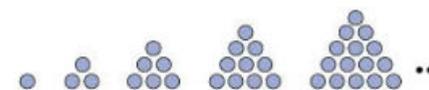
- a) ¿Qué distancia habría recorrido en 5 segundos? ¿Y en 6 segundos?  
 b) ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, habría recorrido 500 m?  
 c) ¿Cuál de las siguientes expresiones relaciona la variación de la distancia recorrida ( $d$ ) en función del tiempo ( $t$ )?

$$d = 5t + 15 \quad d = 3t^2 + 2t \quad d = 2t^2 + 3t \quad d = 5t^2$$

Discute con un compañero tu respuesta. En caso de no coincidir, revisen sus procedimientos y cálculos.

- d) De acuerdo con la expresión elegida, ¿qué distancia recorre el objeto en 3 segundos? ¿Y en 4 segundos? ¿Coinciden los valores encontrados con los que muestra la tabla?  
 e) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en caer al suelo?

3. La representación geométrica de los números triangulares es la siguiente:



La suma  $S$  de puntos que forman un número triangular depende del número de filas de puntos ( $n$ ) que tiene el número triangular.

El valor de  $S$  se halla con la fórmula  $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .

a) Completen la siguiente tabla, que corresponde a esta situación.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S$	1	3	6							

b) ¿Cuántos puntos hay en las primeras 100 filas de un número triangular?

4. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. Su altura aproximada ( $h$ ) en un tiempo  $t$  está dada por la fórmula  $h = -5t^2 + 20t$ .

- a) ¿A qué altura se encuentra la pelota 1 segundo después de haber sido lanzada?  
 b) ¿A qué altura se encuentra a los 3 segundos?



• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar algunos de los tipos de funciones:  
 - [http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones\\_tipos.html](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones_tipos.html)

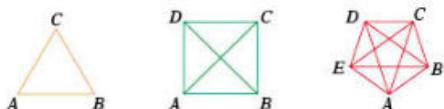
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

- c) Completa la siguiente tabla, que relaciona la altura que alcanza la pelota en los tiempos que se indican.

Tiempo (t)	0	1	2	3	4	5
Altura (h)						

- d) De acuerdo con la tabla de valores, ¿cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?  
 e) ¿Qué significa el valor que se obtiene para la altura cuando el valor del tiempo es 5?

5. Analicen las siguientes figuras.



- a) ¿Cuántos segmentos hay en cada figura?  
 b) En sus cuadernos, tracen un hexágono y los segmentos que unan todos los pares de vértices. Cuenten los segmentos que observen en esa figura. ¿Cuántos son?  
 c) Completen la siguiente tabla.

Número de lados del polígono (n)	3	4	5	6	7
Total de segmentos (T)	3	6			

- d) ¿Qué expresión algebraica permite determinar el número de segmentos  $T$  que unen todos los pares de vértices de un polígono de  $n$  lados?

6. La sucesión de números de Fibonacci empieza así: 1, 1, 2, 3, 5, ... Cada término de la sucesión es la suma de los dos números anteriores. Por ejemplo:

$$1 + 1 = 2 \quad 1 + 2 = 3 \quad 2 + 3 = 5$$

- a) Utilicen esta información para completar la siguiente tabla. La letra  $n$  representa la posición del término en la sucesión;  $F_n$  representa el término que está en esa posición.

Posición del término (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Término ( $F_n$ )	1	1	2	3	5							

- b) Seguramente pueden completar fácilmente la tabla anterior aun cuando no hay una expresión algebraica que permita encontrar el término **enésimo**  $F_n$ . El hecho de que no exista esa expresión ¿significa que  $F_n$  no es una función de  $n$ ? ¿Por qué?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Propongan un ejemplo de una situación en que dos cantidades estén relacionadas por una función cuadrática. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Glosario**

**Enésimo.** En una sucesión, es un lugar indeterminado que ocupa un término.

# Contenido 6

## Escala de la probabilidad y características de los eventos: complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

Seguramente has visto que, al jugar a los volados, en ocasiones salen 5 o más águilas seguidas. Cuando esto sucede, algunas personas piensan que si se lanza de nuevo la moneda, lo más probable es que caiga águila. Otras piensan lo contrario: ahora sí caerá sol. ¿Será cierto lo que afirma uno o el otro? ¿Acaso la moneda tiene memoria y se acuerda del último resultado?

**Te recomendamos la lectura**

"Teoría de las probabilidades" y otros temas, en De la Peña, J. A., *Matemáticas y vida cotidiana*, México, Santillana, 2002b.

### 6.1. Escala de la probabilidad

#### Problema inicial

Una empresa tiene dos vacantes. Por experiencia, la empresa sabe que, aproximadamente, la mitad de los candidatos resultan ser varones y la mitad mujeres.

Esta mañana, un empleado de recursos humanos entrevistará a dos candidatos para cada vacante. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras que es más probable que ocurra? Justifica tu respuesta.

- Los dos candidatos serán mujeres.     Los dos candidatos serán varones.     Un candidato será mujer y el otro varón.

#### Exploración y discusión



- a) Reúnete con un compañero. Comenten qué tendrían que hacer para saber cuál de los tres eventos tiene más posibilidades de ocurrir. Escriban su propuesta en el siguiente recuadro.

- b) En la tabla siguiente, registren todas las formas diferentes de género de los candidatos que es posible que lleguen a la entrevista.

	Candidato 2	
Candidato 1		

En una situación en la que interviene el azar o en un experimento aleatorio, al conjunto de todos los resultados posibles se le llama *espacio muestral*.

- c) ¿Cuál es el espacio muestral de esta situación? \_\_\_\_\_  
 d) En total, ¿cuántos resultados posibles hay? \_\_\_\_\_

- e) ¿Cuántos de esos resultados son favorables a los siguientes eventos?:
- “los candidatos son mujeres” \_\_\_\_\_
  - “los candidatos son varones” \_\_\_\_\_
  - “un candidato es mujer y otro es varón” \_\_\_\_\_
- f) ¿Cuál es la probabilidad teórica de que ocurra que los candidatos son mujeres?
- $$P(\text{los candidatos son mujeres}) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de resultados posibles}} = \underline{\hspace{2cm}}$$
- g) ¿Cuál es la probabilidad teórica de cada uno de los siguientes eventos?:
- los candidatos son varones:  $P(\text{los candidatos son varones}) = \underline{\hspace{2cm}}$
  - un candidato es mujer y otro es varón:  $P(\text{mujer y varón}) = \underline{\hspace{2cm}}$
- h) Si toman en cuenta la probabilidad teórica de cada evento, ¿cuál tiene mayor probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_
- i) ¿Cuál evento tiene menor probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_  
 ¿Cuáles tienen igual probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_
- j) ¿Cuánto suman las probabilidades teóricas de los tres eventos? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus respuestas. Comparen los valores de la probabilidad teórica obtenida para cada evento y para la suma de los tres eventos. Además, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las probabilidades de los siguientes eventos:
  - “el primer candidato es mujer y el segundo es varón”.
  - “el primer candidato es varón y el segundo es mujer”.
- ¿A cuál de los tres primeros eventos es equivalente la suma de los dos últimos eventos?
- Escribe todos los resultados posibles que pueden obtenerse si, en lugar de dos, hay tres candidatos.
- ¿Cuál de los tres sucesos tendría mayor probabilidad de ocurrir? ¿Por qué?

Escriban en su cuaderno los procedimientos y las respuestas obtenidas, así como las conclusiones obtenidas en el grupo.

**Actividades adicionales**

- Luis y María juegan a los dados. Lanzan un dado cuyas caras están numeradas del 1 al 6.
  - Si Luis elige el evento: “cae un número menor que 3”, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra este evento?
  - Si María elige el evento: “cae un número mayor que 3”, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra este evento?

- Si Luis eligiera el evento “cae un número mayor que 0”:
  - ¿Cuáles son los resultados posibles de este experimento?
  - ¿Cuáles son los resultados favorables a este evento?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra este evento?
  - ¿Habría manera de ganarle un juego a Luis? ¿Por qué?
- Si María eligiera el evento: “cae un número mayor que 6”:
  - ¿Hay algún resultado favorable a ese evento?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra este evento?
  - ¿Tendría alguna posibilidad de ganar María?

Quando un evento tiene probabilidad 0, significa que nunca ocurrirá; es decir, es un *evento imposible*.  
 Si un evento tiene probabilidad 1, es seguro que sucederá, y se le llama *evento seguro*.

- En el anterior experimento, ¿cuál de los cuatro eventos es imposible? ¿Cuál es seguro?
2. Representemos con letras mayúsculas los eventos del problema anterior:

- A = “cae un número menor que 3”
- B = “cae un número mayor que 3”
- C = “cae un número mayor que 0”
- D = “cae un número mayor que 6”

- En la siguiente recta numérica, ubica los valores de las probabilidades de estos eventos y anota en ella las letras que los representan.



- ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la probabilidad de un evento? ¿Y el menor?
  - ¿Qué significa el hecho de que un fenómeno tiene probabilidad 0 de ocurrir?
  - ¿Y de que la probabilidad sea 1?
3. En una rifa que tiene 100 números, el grupo “A” adquiere 2 boletos; el “B”, 35 boletos, y el “C”, el resto.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el premio quede en cada grupo?
  - De esos valores de probabilidad, ¿cuál se ubica más cerca del 0 en la escala de la probabilidad?
  - ¿Cuál está más cerca del centro de la escala?
  - ¿Cuál se localiza más cerca del 1?



Coordinados por su profesor, expongan con argumentos en el grupo las respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## 6.2. Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes

### Problema inicial

En una escuela secundaria se va a festejar el día del estudiante y los profesores se organizaron para comprar 200 paletas de hielo: 60 de fresa, 50 de grosella, 80 de limón y 10 de uva. Si a cada estudiante se le entregará una paleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que Andrés (un estudiante de esa secundaria al que le gustan las paletas de uva) reciba una que no sea de uva? \_\_\_\_\_

Beto, Carmen y Daniela también son estudiantes de esa secundaria. A Beto le gustan las paletas de fresa y de limón; a Carmen, de limón, y a Daniela, de uva y de grosella. Ellos son los primeros en la fila. Un maestro saca una paleta. ¿Existe la posibilidad de que sea de un sabor que le gusta a dos de los cuatro compañeros? \_\_\_\_\_ ¿En qué casos? \_\_\_\_\_

### Exploración y discusión

a) En la situación de obsequiarle a un alumno una paleta al azar, ¿cuáles son los resultados que pueden ocurrir? Escribe tu propuesta en el siguiente recuadro.



b) Reúnete con un compañero. En el siguiente recuadro, propongan una manera de representar el espacio muestral de la situación.

c) ¿Cuál es la posibilidad de que a un estudiante le toque una paleta de uva? \_\_\_\_\_

d) ¿Cuántas posibilidades hay de que un estudiante reciba una paleta que no es de uva? \_\_\_\_\_

e) Considerando los sabores de paleta que prefieren Andrés y Daniela, ¿existe la posibilidad de que la paleta que saca el maestro sea del sabor que a ambos les gusta? \_\_\_\_\_ ¿En qué caso? \_\_\_\_\_

f) Si toman en cuenta las preferencias de sabor de Beto y Daniela, ¿es posible que la paleta que saca el maestro les guste a ambos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

g) ¿Qué parejas se deben considerar para que la paleta que saca el maestro le guste solamente a uno de ellos? \_\_\_\_\_

h) Tomando en consideración las preferencias de sabor de cada uno de los cuatro estudiantes como eventos, ¿qué características tienen los pares de eventos en que a ambos estudiantes les gusta la paleta del mismo sabor? \_\_\_\_\_

i) ¿Qué características tienen los pares de eventos en que el sabor de la paleta le gusta sólo a uno de los dos estudiantes? \_\_\_\_\_

Dos eventos son *mutuamente excluyentes* si la ocurrencia de uno descarta la posibilidad de que el otro ocurra.

Dos eventos son *complementarios* entre sí si los resultados favorables de uno son totalmente distintos de los del otro y, además, si juntos esos resultados forman el espacio muestral.

j) ¿Cuáles de los eventos anteriores son complementarios? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

k) ¿Cuáles son mutuamente excluyentes? \_\_\_\_\_



Apoyados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo las respuestas que dieron los equipos a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

### Actividades adicionales

1. Ernesto tiene tres ayudantes en su tienda. Si  $A$  es el evento en que todos sus ayudantes son mujeres y  $B$  es el evento en que todos son hombres, ¿son mutuamente excluyentes los eventos  $A$  y  $B$ ? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Rosita estudia en una escuela secundaria. Considera los siguientes eventos:

$A$  = Su escuela está al norte de la ciudad.       $B$  = Su escuela es privada.       $C$  = Su escuela está en el noroeste de la ciudad.

¿Son estos eventos mutuamente excluyentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

3. Para el experimento de lanzar un dado, considera los siguientes eventos:

$A$  = "cae un número menor que 2"       $C$  = "cae un número par"  
 $B$  = "cae un número mayor que 2"       $D$  = "cae un número impar"

a) ¿Cuáles pares de estos eventos son mutuamente excluyentes? \_\_\_\_\_

b) ¿Cuáles pares son complementarios? \_\_\_\_\_

4. Se lanzan dos dados y se obtiene la suma de los resultados obtenidos. Considera los siguientes eventos:

$A$  = "la suma es mayor que 10"       $C$  = "la suma es menor que 11"  
 $B$  = "la suma es par"       $D$  = "la suma es 7"

a) ¿Cuáles pares de estos eventos son mutuamente excluyentes? \_\_\_\_\_

b) ¿Cuáles pares son complementarios? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a las cuatro actividades anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

### 6.3. ¿Cuándo dos eventos de azar son independientes?

#### Problema inicial

Con un frasco que contiene 2 canicas azules y 2 rojas, realizo los siguientes dos experimentos de azar.



Experimento 1	Experimento 2
Se saca una canica al azar, se registra su color y se devuelve al frasco; enseguida se saca otra canica.	Ahora se saca una canica al azar, se registra su color y no se devuelve al frasco; luego, se saca otra canica.

Si, en ambos experimentos, la primera canica extraída fue roja, ¿en cuál de ellos es más posible que la segunda canica extraída sea roja? Justifica tu respuesta.

#### Exploración y discusión

a) ¿Las posibilidades de que en ambos experimentos la segunda canica sea roja son las mismas o son diferentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_



b) En el experimento 1, ¿cuál es la probabilidad de que la primera canica extraída sea roja? ¿Y la probabilidad de que la segunda canica extraída también sea roja? Discute con argumentos tus respuestas con un compañero.

c) El hecho de que la primera canica extraída haya sido roja ¿influye en la probabilidad de que la segunda canica extraída también sea roja? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

d) En el experimento 2, el hecho de no haber devuelto al frasco la canica roja de la primera extracción, ¿influye en la probabilidad de que la segunda canica extraída sea roja? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

*Dos eventos son independientes si el hecho de ocurrir uno de ellos no influye en la probabilidad de que ocurra otro.*

*En caso contrario, dos eventos son dependientes si la ocurrencia de uno influye en la probabilidad de que ocurra el otro.*

e) ¿En cuál de los dos experimentos, los eventos son independientes? \_\_\_\_\_

¿En cuál, los eventos son dependientes? \_\_\_\_\_



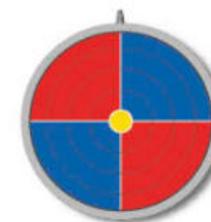
Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo las respuestas que dieron los equipos a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales



Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Se lanzan dardos sobre una ruleta, como la que aparece en la figura.



Considera los siguientes eventos:

$A$  = "el dardo da en una región roja"       $B$  = "el dardo da en una región azul"

¿El evento  $B$  es dependiente o independiente del evento  $A$ ? Es decir, el hecho de que en el primer tiro el dardo haya dado en la región roja, ¿influye en la probabilidad de que en un segundo tiro el dardo dé en la región azul? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. En el juego de los volados (lanzar una moneda), considera los eventos:

$C$  = "cae águila"       $D$  = "cae sol"

¿El evento  $D$  es dependiente o independiente del evento  $C$ ? Es decir, el hecho de que en el primer lanzamiento la moneda haya caído águila, ¿influye en la probabilidad de que en un segundo lanzamiento caiga sol? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

3. En el juego de lanzamiento de un dado, considera los eventos:

$E$  = "cae 6"       $F$  = "cae 1"

¿El evento  $F$  es dependiente o independiente del evento  $E$ ? O sea, el hecho de que en un primer lanzamiento haya salido 6, ¿influye en la probabilidad de que en el segundo lanzamiento salga 1? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

4. Se colocan seis juguetes en un recipiente. Los juguetes son idénticos excepto por el color: son tres amarillos y tres blancos. Se pide a un niño tomar dos juguetes al azar. Considera los siguientes eventos:

$A$  = "sale un juguete amarillo"       $B$  = "sale un juguete blanco"

¿El evento  $B$  es dependiente o independiente del evento  $A$ ? Es decir, el hecho de que en la primera extracción haya salido un juguete amarillo, ¿influye en la probabilidad de que en la segunda extracción salga un juguete blanco? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo las respuestas que dieron los equipos a los cuatro problemas anteriores.

Usemos las TIC



• Observa el video "¿Cuándo dos eventos son independientes?" para reconocer situaciones aleatorias donde los eventos son independientes:

– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/4/1369>

• Utiliza los recursos que se proponen para saber cuándo, en una situación aleatoria, dos eventos son independientes, dependientes o compuestos:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-eventos-dependientes-e-independientes>

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-eventos-dependientes-e-independientes/com-puestos-e-independientes/v/compound-probability-of-independent-events>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

## Diseño de un estudio o experimento estadístico

De acuerdo con el informe "La obesidad y la economía de la prevención", publicado por la OCDE, el 70 % de la población del país padece sobrepeso, y el restante 30 %, obesidad. (Fuente: *OECD Health Data 2013*, disponible en: <[http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=HEALTH\\_LVNG](http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=HEALTH_LVNG)>, consultado el 16 de julio de 2013.)

Para dar esta noticia, ¿consideras que fue necesario pesar a cada uno de los habitantes? ¿Por qué?

Te recomendamos la lectura

"¿Qué es la estadística", en De la Peña, J. A., *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana, 2002b.

### 7.1. Estudios estadísticos. Población y muestra

#### Problema inicial

En una revista apareció la siguiente información estadística:



FUENTE: Merca 2.0, México, julio de 2012.

¿Cuál es la forma más frecuente de festejar el día de las madres? \_\_\_\_\_

¿Cuántas personas contestaron esta encuesta? \_\_\_\_\_

¿Cómo obtuvieron estos datos los autores de la investigación? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



a) Si en la clase de Matemáticas te hubieran pedido que investigaras en tu comunidad cómo festejarían las personas el día de las madres, ¿a quiénes les harías la pregunta? Forma un equipo con tres o cuatro compañeros y discutan sus respuestas.

b) ¿Tendrían que preguntar a todos los integrantes de la comunidad? \_\_\_\_\_

c) Si sólo les van a preguntar a unos cuantos, ¿cómo los seleccionarían? \_\_\_\_\_

¿Qué características de las personas tomarían en cuenta para hacer la selección? \_\_\_\_\_

En estadística es importante distinguir entre una *población*, que incluye a todos los elementos de interés, y una *muestra*, que comprende a algunos elementos representativos de la población.



d) Si consideran el nivel socioeconómico de la persona, ¿qué tomarían en cuenta para determinar el número de personas que entrevistarían por cada nivel socioeconómico? \_\_\_\_\_

e) Supongan que la población total de su comunidad es de 100 000 personas. ¿A cuántas habría que hacer la pregunta para que los resultados puedan aplicarse a la comunidad en general? \_\_\_\_\_

f) Los autores de esta investigación dijeron que llegaron a los resultados indicados a partir de 174 respuestas, que recibieron a través de su correo electrónico. ¿Se puede estar seguro de que los resultados que presenta la gráfica son válidos para la población en general? Argumenten sus respuestas. \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, comparen en clase las respuestas que dieron los equipos a las preguntas anteriores (en particular, con respecto al número de respuestas que recibió la empresa que presenta los resultados). Analicen las ventajas y desventajas de las diversas propuestas que se presenten. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales



1. Realiza con tu equipo la actividad descrita en el problema inicial. Para ello te sugerimos proceder de la siguiente manera:

- Pónganse de acuerdo sobre cómo, cuándo y con quiénes recabar la información para saber cómo se festeja el día de las madres en una población determinada.
- Determinen la manera en que registrarán esa información.
- Organicen la información recabada.
- Una vez concluida la investigación, presenten en el grupo los resultados.
- Analicen los resultados obtenidos por los diversos equipos y escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.
- Para realizar esta actividad, pueden destinar tres o cuatro sesiones de clase (quizás no consecutivas) para dar tiempo suficiente a cada una de las etapas del proceso.



2. Reúnete con un compañero para realizar la siguiente actividad.

A 30 alumnos de tercer grado que vieron un programa de televisión (completo o una parte de él), se les hicieron las siguientes preguntas:

*Pregunta 1:* Asigna una nota (de 0 a 20) que represente tu grado de satisfacción.

*Pregunta 2:* ¿Cuánto tiempo pasaste frente al televisor?

- Análisis de las respuestas a la pregunta 1

Enseguida se muestra la serie de 30 respuestas que se dieron.

17	14	11	9	8	11	17	9	11	17
6	9	17	17	11	9	8	11	17	14
11	17	9	11	17	17	11	8	9	17

#### PROYECTO DEL BLOQUE

##### Realizar una encuesta

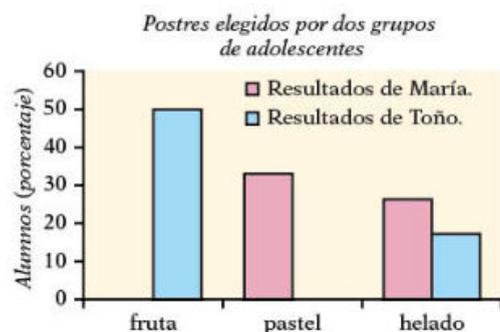
Uno de los primeros pasos del proyecto, cuando ya se conoce el tema y objetivo del estudio estadístico, es el diseño del instrumento a partir del cual se reunirán los datos. La encuesta es uno de esos instrumentos y se requiere que las preguntas que la conformen sean claras y precisas. Reúnete con tu equipo, seleccionen el tema sobre el cual realizarán su estudio estadístico y planteen las preguntas que conformarán su encuesta. Si es posible, pidan a algunos compañeros que las contesten, con el propósito de detectar confusiones o malos entendidos.



- a) De acuerdo con la gráfica que construyeron, ¿con cuál de las dos preguntas (la de la encuesta de María o la de Toño) se ha dado lugar a que se elija la fruta como postre? \_\_\_\_\_
- b) ¿Con cuál de las dos preguntas se ha elegido un pastel como postre? \_\_\_\_\_
- c) ¿Piensan que la manera en qué está redactada la pregunta 3 de cada encuesta influye en las respuestas? ¿Cómo piensan que debería redactarse esta pregunta?
- d) Completa la tabla y la gráfica siguientes:

*Postres*

Postre elegido	Resultados de María		Resultados de Toño	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Fruta	24		15	
Pastel	20		10	
Helado	16		5	
Totales	60	100	30	100



- e) Comparen las dos gráficas, la que construyeron y la que completaron. Si María y Toño quieren argumentar que los alumnos entrevistados eligen como postre una fruta, ¿cuál de las dos gráficas conviene utilizar? Justifiquen su respuesta.
- f) Escojan una de las dos encuestas (la de María o la de Toño), y aplíquenla entre todos sus compañeros de grupo. Clasifiquen las respuestas y registren sus resultados en una tabla. Para ello deberán acordar cuántas columnas y cuántos renglones deberá tener la tabla, y cuáles son los encabezados y títulos adecuados.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

**Realizar una encuesta**

Una vez que han diseñado su encuesta, procedan a su aplicación. Es posible que tengan dificultades para entrevistar a toda la población o grupo de interés, por lo que podrán aplicarla solamente a una parte de ella. Es conveniente que analicen si están en condiciones de realizar un censo o no para determinar la cantidad de cuestionarios o encuestas que aplicarán, es decir, determinarán el número de personas que encuestarán y dónde o cómo harán contacto con ellas.

- g) Discutan y decidan qué tipos de gráficas conviene utilizar para mostrar los resultados de las preguntas 1 y 2 de las encuestas. ¿Cuáles son los ejes y cuál es el título más apropiado para cada gráfica? Constrúyanlas y preséntenlas al grupo.

- h) Con base en los datos que obtuvieron en ambas encuestas, ¿cuál es el postre que elige el grupo?



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo las conclusiones obtenidas por los equipos.

**Actividades adicionales**



1. Con los resultados que obtuvieron en el equipo al realizar la encuesta en el grupo, realicen las siguientes clasificaciones:

- a) De acuerdo con la edad, ¿quiénes eligen el helado como postre?
- b) Según el sexo, ¿quiénes eligen comer pastel como postre: los hombres o las mujeres?
- c) Escriban otra clasificación que se podría realizar con los datos que obtuvieron. Organicen los datos de acuerdo con esa nueva clasificación.

2. A continuación les sugerimos otros temas relacionados con la salud.

- Deportes que practican
- Enfermedades que han padecido
- Hábitos de descanso
- Antecedentes clínicos de familiares directos

Seleccionen uno de ellos, u otro que les interese más, y elaboren una encuesta para obtener los datos.

- a) Planteen las preguntas de la encuesta.
- b) ¿Cómo clasificar y organizarán los datos que obtengan?
- c) ¿Qué representaciones gráficas utilizarán? ¿Por qué?
- d) Elaboren sus conclusiones y relacionen los resultados de este nuevo estudio con los que obtuvieron otros compañeros y con los resultados de la investigación que realizaron anteriormente.
- e) Investiguen en diversas fuentes (internet, anuarios, publicaciones oficiales, etcétera) cuáles son las estadísticas nacionales referidas al aspecto que seleccionaron y comparen si en proporción esos resultados corresponden a los que obtuvieron.



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo las conclusiones de cada equipo.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

**Realizar una encuesta**

*Cierre del proyecto: conteo y registro de los datos.* Deberán acordar cómo deben organizarlos para que al realizar su análisis proporcionen fácilmente información útil. Dos procedimientos que son útiles para describir y resumir los datos son: la distribución de frecuencias y las medidas descriptivas, como las de tendencia central. Elaboren el informe del estudio que realizaron y preséntenlo a su grupo.



1. Colorea el alvéolo con la respuesta correcta en cada caso.

1. Las soluciones de la ecuación  $\frac{75}{x^2} = 3$  son:

- A) 3 y -3
- B) 5 y -5
- C) 15 y -15
- D) 25 y -25

2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación  $x^2 - 2 = 14$ ?

- A) 2 y -2
- B) 4 y -4
- C) 7 y -7
- D) 16 y -16

3. ¿Cuál de los siguientes problemas puede modelarse con la ecuación  $\frac{x(x+3)}{2} = 20$ ?

- A) El área de un rectángulo es  $20 \text{ cm}^2$ . La altura mide 3 cm más que la base. ¿Cuánto miden sus lados?
- B) El área de un trapecio es  $20 \text{ cm}^2$ . La base mayor mide 3 cm más que la base menor. ¿Cuánto mide la altura?
- C) El área de un rombo es  $20 \text{ cm}^2$ . La diagonal mayor mide 3 cm más que la diagonal menor. ¿Cuánto mide cada diagonal?
- D) El área de un trapecio es  $20 \text{ cm}^2$ . La base mayor mide 3 cm más que la altura. ¿Cuánto mide la base?

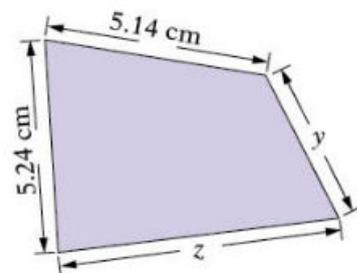
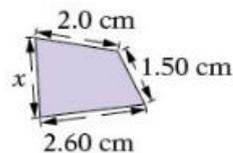
4. Son figuras semejantes:

- A) Todos los triángulos
- B) Todos los cuadrados
- C) Todos los rectángulos
- D) Todos los rombos

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

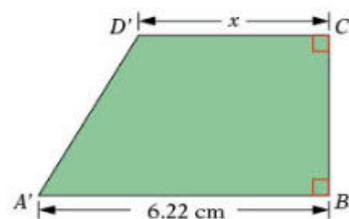
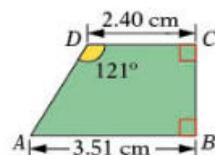
- A) Dos triángulos que son congruentes tienen la misma área.
- B) Dos triángulos que son congruentes tienen el mismo perímetro.
- C) Dos triángulos que son congruentes tienen la misma forma y tamaño.
- D) Dos triángulos que son congruentes son equiláteros.

6. Estos polígonos son semejantes. ¿Cuáles son los valores aproximados de  $x, y, z$ ?



- A)  $x = 2.30 \text{ cm}, y = 3.70 \text{ cm}, z = 6.46 \text{ cm}$
- B)  $x = 2.03 \text{ cm}, y = 3.86 \text{ cm}, z = 6.68 \text{ cm}$
- C)  $x = 2.25 \text{ cm}, y = 3.75 \text{ cm}, z = 6.45 \text{ cm}$
- D)  $x = 2.45 \text{ cm}, y = 3.80 \text{ cm}, z = 6.82 \text{ cm}$

Considera los trapecios  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  para contestar las preguntas 7 y 8.



7. ¿Cuál es la medida del ángulo  $B'A'D'$ ?

- A)  $49^\circ$
- B)  $59^\circ$
- C)  $69^\circ$
- D)  $79^\circ$

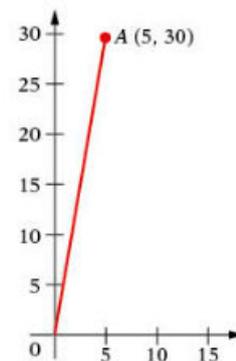
8. ¿Cuál es la medida aproximada el lado  $D'C'$ ?

- A) 4.12 cm
- B) 4.25 cm
- C) 4.80 cm
- D) 5.91 cm

9. Un vehículo circula a una velocidad promedio de 90 km por hora. En 1 hora 20 minutos habrá recorrido...

- A) 108 km
- B) 120 km
- C) 150 km
- D) 180 km

Utiliza la siguiente información para contestar las preguntas 10 a 12. Las coordenadas de uno de los puntos de la gráfica de una situación de proporcionalidad directa son: (5, 30).



10. ¿Cuál es la ordenada cuya abscisa es 7?

- A) 32
- B) 37
- C) 42
- D) 47

11. ¿Qué expresión algebraica corresponde a esta gráfica?

- A)  $y = 5x$
- B)  $y = 6x$
- C)  $y = 7x$
- D)  $y = 8x$

12. ¿Cuál de las siguientes situaciones *no* puede asociarse con las representaciones anteriores?

- A) Luis tiene 5 años y su papá 30. ¿Qué edad tenía el papá cuando nació Luis?
- B) Un pentágono regular de 6 cm por lado tiene un perímetro 30 cm. ¿Cuál es el perímetro de otro pentágono regular de 5 cm por lado?
- C) Si 5 barras de chocolate cuestan \$ 30.00, ¿cuánto cuestan 12 barras?
- D) Las dimensiones de una regla rectangular son 5 cm por 30 cm. ¿Cuáles serán las dimensiones de la regla si las medidas se reducen a la mitad?

13. La función que describe el movimiento de una piedra al caer en un pozo es  $y = -4.9t^2$ , donde  $y$  representa el número de metros descendidos y  $t$  es el tiempo (medido en segundos). ¿Cuál es la profundidad del pozo si la piedra tarda exactamente 2 segundos en recorrerlo?

- A) 4.9 m
- B) 9.8 m
- C) 14.7 m
- D) 19.6 m

14. ¿Qué expresión algebraica representa la variación del área de un cuadrado en relación con la medida del lado?

- A)  $y = 2x$
- B)  $y = 4x$
- C)  $y = x^2$
- D)  $y = 4x^2$

15. De las siguientes tablas de valores, ¿cuál corresponde a una función cuadrática?

A) 

5	7	15	32
15	21	45	96

B) 

1	2	3	4
1	4	9	16

C) 

2	5	7	13
4	7	9	15

D) 

1	2	3	4
4	7	10	13

16. De los siguientes casos, ¿en cuál están relacionadas las cantidades por una función cuadrática?

- A La distancia recorrida a una velocidad constante y la duración del recorrido.
- B La longitud del radio de un círculo y el área del círculo.
- C El precio de una computadora portátil y su volumen.
- D La medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

17. Una regla de un metro de largo se coloca verticalmente en el piso y proyecta una sombra de una longitud de 0.65 m. Al mismo tiempo, un poste de luz proyecta una sombra de 4.5 m. ¿Cuál es la altura del poste?

- A 5.15 m
- B 5.80 m
- C 6.25 m
- D 6.92 m

II. Resuelve lo siguiente.

María y Rocío juegan a lanzar un dado. María gana si sale un número par (evento  $A$ ) y Rocío si sale un número impar (evento  $B$ ). Tomando como base las características de los eventos  $A$  y  $B$ :

1. Explica por qué en cada lanzamiento del dado siempre habrá una ganadora.

2. Explica por qué, si un juego lo gana María, el siguiente lo puede ganar Rocío.

## ¿Puedes ser donador?

La sangre humana se clasifica de dos maneras:

- Por su *grupo*: O, A, B y AB.
- Por su *factor Rh*: positivo o negativo.

Todas las personas tienen un tipo de sangre, que está formado por un grupo de sangre y un factor Rh.

En la Ciudad de México, las estadísticas sobre esta cuestión nos dicen:

Grupo de sangre	% de la población
O	65
A	25
B	8.5
AB	1.5

Factor Rh	% de la población
Positivo	85
Negativo	15

FUENTE: <<http://donarsangre.net/sangre.php>>, consultado el 10 de marzo de 2013.

Por eso decimos comúnmente que, por ejemplo, alguien tiene sangre tipo A positivo (A+).

1. Si en la Ciudad de México se elige a una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea AB? Marca con una (✓) las opciones que son verdaderas.

- 15 %
- $\frac{15}{100}$
- 0.015
- $\frac{3}{200}$
- 0.15

2. El personal médico de una clínica registra el grupo sanguíneo y el factor Rh de una persona. ¿Cuántas posibilidades pueden presentarse al hacer el registro? Justifica tu respuesta.

3. Si se quiere registrar a un grupo de personas clasificándolas por su grupo sanguíneo, se tendrían cuatro eventos:

$$E_1 = \text{sangre tipo O} \quad E_2 = \text{sangre tipo A} \quad E_3 = \text{sangre tipo B} \quad E_4 = \text{sangre tipo AB}$$

¿Cómo son estos eventos entre sí: complementarios, mutuamente excluyentes o independientes? ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

Los eventos son...	Cierta/Falsa
... complementarios, porque la clasificación total de personas está compuesta por las personas que pertenecen al grupo de sangre tipo A más las personas que no tienen este tipo de sangre.	Cierta/Falsa
... mutuamente excluyentes, porque si ocurre, por ejemplo, que una persona pertenece al grupo de sangre tipo O, se descarta que la siguiente persona pertenezca al grupo de sangre tipo B.	Cierta/Falsa
... independientes, porque si ocurre que una persona tiene sangre tipo O, no influye en que al clasificar a la siguiente persona tenga, por ejemplo, sangre tipo A.	Cierta/Falsa
... dependientes, porque si una persona tiene sangre tipo O, puede ser O negativo u O positivo.	Cierta/Falsa

4. Los donantes de sangre y los receptores deben tener grupos compatibles. La siguiente tabla muestra la compatibilidad entre grupos sanguíneos.

Donantes \ Receptores	Receptores							
	AB+	AB-	A+	A-	B+	B-	O+	O-
AB+	✓							
AB-	✓	✓						
A+	✓		✓					
A-	✓	✓	✓	✓				
B+	✓				✓			
B-	✓	✓			✓	✓		
O+	✓		✓	✓	✓	✓	✓	
O-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

FUENTE: adaptada de <<http://www.donarsangre.org/donantes-de-sangre/grupos-sanguineos/>>, consultado el 10 de marzo de 2013.

a) Una clínica cuenta sólo con sangre O-. ¿Qué probabilidad hay de que pueda servirle a un paciente cuyo tipo de sangre se desconoce? Justifica tu respuesta.

b) Supón que una persona cuyo tipo de sangre es AB+ requiere una transfusión sanguínea. Va a una clínica acompañado de un amigo sano. ¿Qué probabilidad hay de que su amigo sea un donante adecuado? Justifica tu respuesta.

5. Las personas con factor Rh negativo únicamente pueden recibir sangre de donadores con factor Rh negativo. Si el tipo de sangre de una persona que requiere una transfusión es A-, ¿cuál es la probabilidad de que otra persona, seleccionada al azar, pueda ser candidato a donador? Márcalas con una (✓).

	Probabilidad	Justificación
<input type="checkbox"/>	40 %	porque: (% del grupo A) + (% con factor Rh negativo) = 25 % + 15 % = 40 %
<input type="checkbox"/>	15 %	porque éste es el porcentaje de la población con factor Rh negativo.
<input type="checkbox"/>	10 %	porque: (% del grupo A) - (% con factor Rh negativo) = 25 % - 15 % = 10 %
<input type="checkbox"/>	3.75 %	porque: (probabilidad del grupo A) × (% con factor Rh negativo) = 0.25 × 15 % = 3.75 %

6. La distribución de los grupos sanguíneos en la población humana no es uniforme. El grupo más común es el O+, mientras que el más escaso es el AB-. Además, hay variaciones en la distribución en las distintas poblaciones del mundo. La figura muestra el caso de España:



FUENTE: <<http://www.donarsangre.org/donantes-de-sangre/grupos-sanguineos/>>, consultado el 10 de marzo de 2013.

Supón que una persona cuyo tipo de sangre es B- viaja a España y por alguna razón requiere una transfusión sanguínea. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de ese país, elegida al azar, sea candidato a donador?

- a) 8 %      b) 9 %      c) 17 %      d) 24.5 %

¿Qué tanto has logrado los aprendizajes esperados? Identifica las situaciones que eres capaz de resolver y márcalas con una (✓). Puedo resolver problemas...

... informalmente sobre ecuaciones cuadráticas, como:	
<input type="checkbox"/> El cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es cero. ¿Cuál es el número?	<input type="checkbox"/> El área de un triángulo es de 100 cm <sup>2</sup> . Su base mide 4 cm menos que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones?
... que implican ecuaciones cuadráticas usando procedimientos personales, como:	
<input type="checkbox"/> $x^2 - 8 = 56$	<input type="checkbox"/> $x^2 - 11x = 26$
... sobre congruencia y semejanza de triángulos, como:	
<input type="checkbox"/> ¿Qué diferencia hay entre dos triángulos que son congruentes y dos que son semejantes?	<input type="checkbox"/> ¿Cuándo dos triángulos son congruentes y cuándo son semejantes por el criterio Lado-Lado-Lado?
... que implican proporcionalidad directa, como:	
<input type="checkbox"/> Dar ejemplos de situaciones cotidianas que correspondan a la relación $y = 1.5x$ .	<input type="checkbox"/> Trazar la gráfica de la relación de proporcionalidad $y = 4x$ .
... sobre funciones cuadráticas, como:	
<input type="checkbox"/> ¿Qué expresión algebraica modela la variación (y) del área de un cuadrado en función de la medida (x) de su lado?	<input type="checkbox"/> Elaborar una tabla de valores que muestre la variación (y) del área de un cuadrado en función de la medida (x) de su lado.
... sobre probabilidad como:	
<input type="checkbox"/> ¿En qué se diferencian dos eventos que son complementarios de dos eventos que son mutuamente excluyentes?	<input type="checkbox"/> ¿Cuál es el menor valor que puede tener la probabilidad de un evento de azar? ¿Y cuál es el mayor valor?

Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido con el estudio de este bloque.	Plantea un problema que ahora ya puedas resolver con los conocimientos y habilidades que desarrollaste en este bloque.
1. _____	_____
2. _____	_____
Escribe un problema planteado en los temas de este bloque, cuya resolución se te haya dificultado.	¿En qué tema o temas te gustaría tener más ayuda y por qué?
_____	_____
_____	_____
En este bloque, ¿en qué consistió tu participación en la resolución de los problemas planteados?	Cuando en tu equipo un compañero daba una respuesta errónea a un problema propuesto, ¿de qué manera mostraste tu desacuerdo?
_____	_____
_____	_____

## ¿Quiénes utilizan la simetría?

Según Hermann Weyl (un matemático alemán), "la simetría es una idea por medio de la cual el hombre, a través del tiempo, ha tratado de crear orden, belleza y perfección" (*Las simetrías*). Esta sensación agradable que nos producen las figuras simétricas ha llevado a los arquitectos, pintores, escultores y, últimamente, a muchos diseñadores gráficos, a basar sus obras en tal característica geométrica.

La simetría, principio fundamental del arte clásico, pasó de moda en la Edad Media, en la que se preferían formas asimétricas, para después volver a ser elemento esencial en el Renacimiento y a dominar en los siglos siguientes.



Palacio de Versalles. La simetría predomina en las formas arquitectónicas de esta imponente construcción del siglo XVII.

### PROYECTO DEL BLOQUE

#### Elaborar diseños geométricos

En su trabajo profesional, los diseñadores de telas, tapices, mosaicos de cerámica y jardines utilizan con frecuencia las transformaciones geométricas (simetría, rotación y traslación). En este proyecto se trata de que apliques esas transformaciones para elaborar en equipo algunos diseños que te parezcan atractivos. Los contenidos 9 y 10 del bloque te ayudarán a desarrollar este proyecto.

## BLOQUE

# III

### Aprendizajes esperados:

#### El alumno:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener una figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

## Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas

En el problema "El cuadrado de un número menos 7 veces el mismo número es 18, ¿de qué número se trata?", ¿qué harías para hallar la solución? ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

**Te recomendamos la lectura**

"En ayuda de la aritmética", en Perelman, Y., *Matemáticas recreativas*, México, Planeta, 2003.

### 8.1. Resolución por factorización (1)

#### Problema inicial

Se ha construido un fraccionamiento sobre una superficie cuadrada. El área del fraccionamiento es igual a 100 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide por lado? ¿Cómo podrías encontrar ese valor? Escribe tu propuesta en el siguiente recuadro.

#### Exploración y discusión

- Si se representa con la literal  $x$  la medida del lado del terreno, ¿qué expresión algebraica representa su área? \_\_\_\_\_
- ¿Qué ecuación puede plantearse para resolver el problema? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento puedes emplear para resolver esa ecuación? ¿Qué soluciones encontraste? Con argumentos, discute tus respuestas con un compañero. \_\_\_\_\_
- Un problema similar es el siguiente: "El área de un cuadrado es igual a 15 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide por lado?"

Una manera de resolverlo consiste en representar la medida del lado con la literal  $x$ , por lo que el área del cuadrado es  $x^2$ . Si se toma en cuenta que el área es igual a  $15x$ , ¿cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones modelan esta situación?

$x^2 = 15x$         $x^2 - 15x = 0$         $x^2 + 15x = 0$

- En la ecuación  $x(x - 15) = 0$ , ¿cuál debe ser el valor de uno de los factores para que el producto de los dos sea cero? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál debe ser el valor de  $x$  en cada caso? \_\_\_\_\_
- Uno de los valores de  $x$  es 0. ¿Por qué se descarta ese valor en el contexto del problema? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del lado del fraccionamiento cuadrado? \_\_\_\_\_



Con el apoyo de su profesor, expongan en el grupo los procedimientos utilizados por los equipos para resolver el problema inicial. Expliquen además las diferencias entre los procedimientos que utilizaron y el que consiste en aplicar la propiedad del factor cero que aparece en el siguiente recuadro. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Si uno de los factores de un producto es 0, entonces el producto es 0. Y al revés: si un producto es 0, entonces al menos uno de los factores es 0. Ésta es la *propiedad del factor cero*. Las soluciones de una ecuación como  $x(x - 15) = 0$  son las soluciones de cada una de las ecuaciones  $x = 0$  y  $x - 15 = 0$ .

#### Actividades adicionales



Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

- ¿Cuánto mide por lado un jardín público de forma cuadrada, si su caseta de vigilancia ocupa una superficie de  $15 \text{ m}^2$ , y el resto del jardín,  $274 \text{ m}^2$ ?
  - ¿Cuál debe ser la medida del lado del jardín para que se cumplan las condiciones que señala el problema? ¿Cómo resolverías este problema? Escribe tu propuesta en el siguiente recuadro.

- Si se representa con la literal  $x$  la medida del lado del jardín, ¿cómo se representa su área? \_\_\_\_\_
  - ¿Con qué ecuación puede modelarse esta situación? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo puede resolverse esta ecuación usando la factorización? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué representa la solución de esta ecuación? \_\_\_\_\_
- Luis le dice a José: "Estoy pensando en un número; si lo elevo al cuadrado y al resultado le resto 5 veces el número, obtengo cero. ¿Cuál es el número?"
    - ¿Qué ecuación cuadrática resuelve el problema de Luis? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuántos números cumplen las condiciones del problema de Luis? \_\_\_\_\_  
¿Cuáles son? \_\_\_\_\_
    - ¿Por qué este problema tiene más de una solución? \_\_\_\_\_

3. José le contesta: "Yo estoy pensando en otro número; si lo elevo al cuadrado y a éste le agrego 3 veces el número, el resultado es 8 veces el número que pensé. ¿Cuál es el número?"

- a) ¿Qué ecuación cuadrática resuelve el problema de José?
- b) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta con respecto de este problema? Subráyena.

- El problema tiene dos soluciones positivas.
- El problema tiene dos soluciones negativas.
- Una de las soluciones del problema es 0 y la otra es un número negativo.
- Una de las soluciones del problema es 0 y la otra es un número positivo.

4. En su cuaderno, resuelvan por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas. Comprueben por sustitución.

- a)  $x^2 = 7x$
- b)  $x^2 - 6x = 0$
- c)  $x^2 - 3x = x$
- d)  $x^2 + 10x = 2x$
- e)  $x^2 - 16 = 0$
- f)  $x^2 = 49$
- g)  $x^2 + 10 = 91$



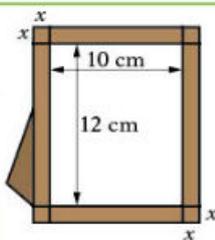
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos que emplearon y los cálculos que realizaron en la resolución de estos problemas. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

### 8.2. Resolución por factorización (2)

#### Problema inicial

Una fotografía mide 10 cm de ancho y 12 cm de largo. Calcula la anchura ( $x$ ) del marco en el que está colocada la fotografía si su área es de  $104 \text{ cm}^2$ .

En el siguiente recuadro, escribe tu propuesta de solución.



#### Exploración y discusión

a) Si se representa con la literal  $x$  la medida de la anchura de todas las piezas, ¿qué expresión algebraica representa el área de cada una? Escríbelas.



- b) ¿Qué expresión algebraica representa el área de las ocho piezas?
- c) Con esta información, ¿qué ecuación puede plantearse para resolver el problema? Anótala y resuélvela en el recuadro siguiente.

Compara el procedimiento que seguiste para hacerlo con el que empleó un compañero. Comparen también las soluciones que obtuvieron. Si no coinciden, revisen el trabajo que realizaron.

d) Supongan que las medidas de la fotografía fueran las mismas (10 cm de ancho y 12 cm de largo) y que el área del marco fuera  $168 \text{ cm}^2$ . Entonces la suma de las áreas de las ocho piezas se expresaría mediante la siguiente ecuación:

$$4x^2 + 2(10x) + 2(12x) = 168$$

La ecuación anterior puede expresarse con todos sus términos en el primer miembro, de la siguiente manera:

$$4x^2 + 44x - 168 = 0$$

Una ecuación equivalente a la anterior es:

$$x^2 + 11x - 42 = 0$$

¿Qué propiedad de la igualdad se aplicó en cada caso para obtener ecuaciones equivalentes?

e) Si factorizan el primer miembro de la ecuación  $x^2 + 11x - 42 = 0$ , obtienen

$$(x + 14)(x - 3) = 0$$

¿Cuál debe ser el valor de uno de esos factores para que el producto de los dos sea cero? ¿Cuál debe ser el valor de  $x$  en cada caso?

f) Uno de estos factores es negativo. ¿Por qué se descarta este valor en el contexto del problema?

g) ¿Cuál es la anchura del marco, si su área es  $168 \text{ cm}^2$ ? ¿Cómo lo pueden comprobar?

h) Utilicen el método de factorización para resolver el problema inicial (el área del marco es de  $104 \text{ cm}^2$ ) ¿Cuánto mide el ancho del marco de la fotografía?

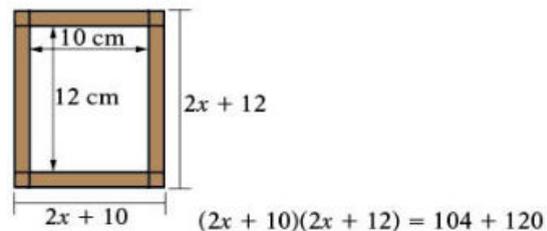


Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Expliquen, además, en qué casos se descarta una solución negativa de una ecuación cuadrática, y sólo se toma la positiva. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

1. En el problema inicial, el área de todo el rectángulo formado por la foto y su marco es  $(2x + 10)(2x + 12) = 104 + 120$ .

Resuelve esta ecuación para hallar la anchura del marco.



a) Al realizar las operaciones indicadas en cada miembro de la ecuación, se obtiene:

$$4x^2 + (10 + 12)2x + 10 \times 12 = 224$$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a la anterior?

$x^2 + 11x - 26 = 0$     
   $x^2 - 11x + 26 = 0$     
   $x^2 + 11x + 26 = 0$

- b) ¿Cómo puede resolverse la ecuación simplificada usando la factorización?  
 c) ¿Las soluciones de esta ecuación y la del problema inicial son iguales o diferentes? ¿Por qué?

2. Un número es 6 unidades mayor que otro. La suma de los cuadrados de ambos es 146. ¿Cuáles son los números?

a) ¿Cómo resolverías este problema? Escribe tu propuesta en el siguiente recuadro.

- b) Si  $x$  representa el número menor, ¿cómo representas al mayor? ¿Cómo representas los cuadrados de estos números?  
 c) ¿Qué ecuación cuadrática representa esta situación? Resuélvela por factorización.  
 d) ¿Cuántos números cumplen las condiciones dadas por el problema? ¿Cuáles son?

3. El perímetro de un terreno rectangular es de 48 m.

a) ¿Cuáles son algunas de las posibles medidas de sus lados? Anótalas en la siguiente tabla.

Usemos las TIC



• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo factorizar ecuaciones cuadráticas:

– <https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/algebra/polynomial-factorization>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Largo							7	8	9	10
Ancho	1	2	3	4	5	6				

- b) ¿Por qué en la tabla aparecen los valores: Largo = 23 y Ancho = 1, y no los de: Largo = 47 y Ancho = 1?  
 c) Si el área de uno de esos rectángulos es  $44 \text{ m}^2$ , ¿cuáles son sus dimensiones?  
 d) Al resolver este problema mediante una ecuación cuadrática, un alumno representó con la literal  $x$  la medida del ancho. ¿Con qué expresión algebraica debe representar la medida del largo?  
 e) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones resuelve el problema anterior?

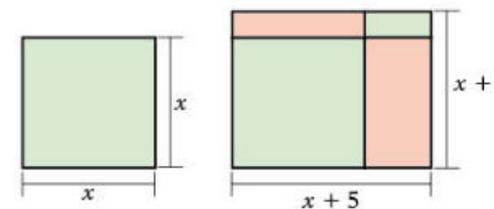
$x(24 + x) = 44$     
   $x(24 - x) = 44$     
   $x(x - 24) = 44$

f) La ecuación que resuelve el problema también puede escribirse en forma factorizada. ¿Cuál de las siguientes es la correcta? Subráyala.

$(x - 22)(x + 21) = 0$     
   $(x - 22)(x - 2) = 0$     
   $(x + 2)(x + 22) = 0$

g) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación que resuelve el problema? Utiliza la tabla anterior para verificar tu respuesta.

4. Halla dos enteros consecutivos cuya suma de sus cuadrados sea 61.  
 5. Pedro tiene un taller instalado en un terreno cuadrado. Quiere ampliarlo aumentando 5 m a un lado y 2 m al otro. Si el área del terreno rectangular formado es  $130 \text{ m}^2$ , ¿cuánto mide el lado del cuadrado inicial?



6. Encuentra una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , cuyas soluciones sean  $-1$  y  $-2$ . Discute con un compañero el procedimiento que propusiste para encontrar la ecuación, así como la forma de resolverla y de comprobar que sus soluciones son  $-1$  y  $-2$ .  
 7. Encuentren, además, dos ecuaciones cuadráticas:  
 a) Una cuyas soluciones sean  $x = 0$  y  $x = 1$ .  
 b) Otra cuya única solución sea  $x = 1$ .



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos realizados para resolver los problemas anteriores. Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo resolver ecuaciones cuadráticas por factorización:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-cuadraticas-y-polinomicas-2#eb-factorizando-expresiones-simples>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Para la siguiente sesión requieres traer regla y compás.

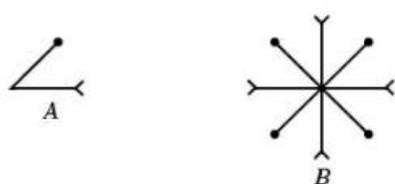
## Propiedades de los movimientos en el plano

Imagina que hay un polígono en un plano, lo desplazas hacia la izquierda y luego lo giras a partir de uno de sus vértices. ¿Qué es lo que ha cambiado en el polígono? ¿Qué permanecerá invariable?

### 9.1. Simetrías

#### Problema inicial

La figura B se obtuvo a partir de la figura A.



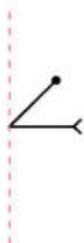
¿Qué transformaciones hubo que hacer a la figura A para obtener la B? Escribe tu respuesta en el siguiente recuadro.

#### Exploración y discusión

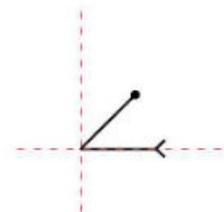
a) ¿Qué figura se obtiene al dibujar la simétrica de la figura A con respecto a un eje horizontal? Trázala.



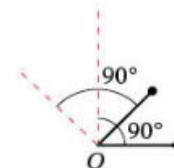
b) ¿Y con respecto al eje vertical? Trázala también.



c) ¿Y al reflejarla dos veces, primero con respecto de un eje de simetría horizontal y luego con respecto a un eje vertical? Trázala. ¿Se obtuvo la figura B? \_\_\_\_\_



d) ¿Qué sucede si se gira sucesivamente, en torno a un punto O con un ángulo de 90°? Trázala también.



Una figura tiene *simetría axial* si existe una recta que la divide en dos partes idénticas, de tal manera que al doblar la figura a lo largo de la recta, las dos partes coincidirán perfectamente.  
 Una figura tiene *simetría central* si existe un punto O tal que, al reflejar cada punto con respecto a O, la reflexión está sobre la misma figura.  
 Una figura tiene *simetría rotacional* si no cambia su apariencia al girarla en torno de un punto con un ángulo distinto de 180°.

e) ¿Con qué transformaciones se pudo obtener la segunda figura a partir de la primera? \_\_\_\_\_

f) ¿La figura tiene simetría central, simetría rotacional o ambas simetrías? \_\_\_\_\_

g) Traza dos figuras A y A' simétricas con respecto a un punto O. Si las giras en torno del punto O, ¿cada una caerá sobre la otra? En caso afirmativo, ¿de cuántos grados será el giro? \_\_\_\_\_



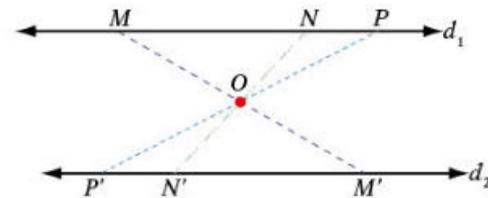
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Además, expliquen por qué, en la simetría rotacional, el ángulo de giro debe ser distinto de  $180^\circ$ . Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

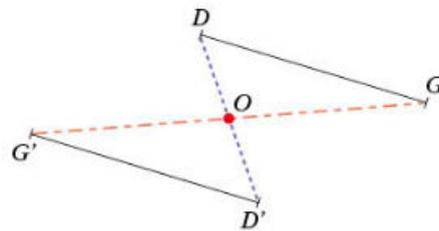


Reúnete con un compañero para analizar las siguientes situaciones y contestar las preguntas que se plantean.

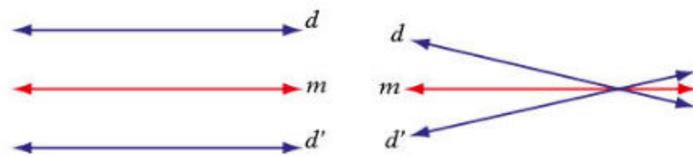
1. La recta  $d_1$  es simétrica a la recta  $d_2$  con respecto al punto  $O$ . ¿Son paralelas las rectas  $d_1$  y  $d_2$ ? ¿En qué argumentos basan su respuesta?



2. Los segmentos  $DG$  y  $D'G'$  son simétricos con respecto del punto  $O$ . ¿Tienen la misma longitud o longitudes diferentes? ¿En qué argumentos basan su respuesta?



3. La simétrica de una recta con respecto de otra recta es también una recta. Analicen los ejemplos.



¿Son siempre paralelas estas rectas simétricas? Expliquen su respuesta.



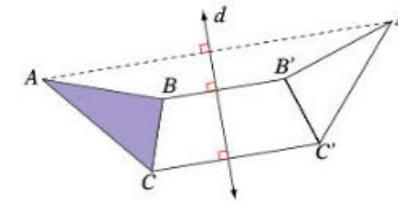
Coordinados por su profesor o profesora, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla y compás.

**9.2. Simetría y triángulos**

**Problema inicial**

Analiza cómo se construye el triángulo  $A'B'C'$  simétrico del triángulo  $ABC$ , con respecto de la recta  $d$ .

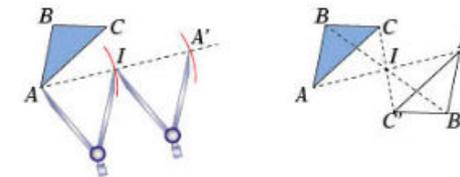


En el siguiente recuadro, explica cómo se realiza esta construcción.

**Exploración y discusión**

- a) En la construcción anterior, ¿por qué la recta  $d$  es mediatriz del segmento  $AA'$ ?

- b) ¿De qué otros segmentos es mediatriz la recta  $d$ ?
- c) Compara con un compañero tus respuestas.
- d) Analicen cómo se construye el simétrico del triángulo  $ABC$  con respecto del punto  $I$ .



Expliquen cómo se realiza esta construcción.

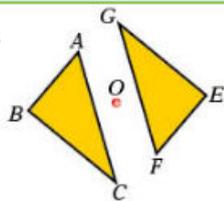
- e) ¿Por qué el punto  $I$  es punto medio del segmento  $AA'$ ?
- f) ¿De qué otros segmentos es punto medio el punto  $I$ ?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Además, expliquen por qué, en la simetría rotacional, el ángulo de giro debe ser distinto de  $180^\circ$ . Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

1. Consideren la figura de la derecha, en la cual los triángulos  $ABC$  y  $EFG$  son simétricos con respecto al punto  $O$ .

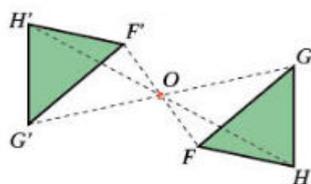


a) Completen:

- El simétrico del punto  $A$  con respecto del punto  $O$  es el punto \_\_\_\_\_.
- Los puntos  $B$  y \_\_\_\_\_ son simétricos con respecto del punto  $O$ .
- El punto  $O$  es el \_\_\_\_\_ de los segmentos  $AF$ ,  $BE$  y  $CG$ .

b) ¿Cuál es el simétrico, con respecto del punto  $O$ , del ángulo  $BAC$ ? \_\_\_\_\_

2. Los triángulos  $FGH$  y  $F'G'H'$  son simétricos con respecto del punto  $O$ . ¿Esos triángulos tienen las mismas medidas (longitudes, perímetros, áreas y ángulos)? Expliquen su respuesta.



3. Centro de simetría de un cuadrado (actividad opcional). Para la siguiente actividad se recomienda utilizar un software de geometría dinámico; en este caso, GeoGebra. (Consulta el Apéndice.)

- Da un clic en el triángulo que está en el ángulo inferior derecho del icono POLÍGONO y elige POLÍGONO REGULAR . Da clic en el área de dibujo; se marcará un punto; da clic nuevamente y se marcará un segundo punto; aparece un cuadro de diálogo que pregunta cuántos vértices se desean para el polígono regular (por omisión aparece 4); da clic en OK y en la pantalla aparece el cuadrado  $ABCD$ .
- Para trazar el simétrico del cuadrado  $ABCD$  con respecto de un punto  $E$ , se da un clic en la herramienta EUGE Y MUEVE , y luego se da clic en el cuadrado  $ABCD$  para seleccionarlo. Da clic en el triángulo de la herramienta REFLEJA OBJETO EN RECTA ; elige REFLEJA OBJETO POR PUNTO . Aparecen el punto  $E$  y un nuevo cuadrado.

Usa el puntero del ratón para mover el punto  $E$  y verás cómo se desplaza también el nuevo cuadrado. Y al revés: si mueves el nuevo cuadrado también se desplaza el punto  $E$ .

- a) ¿Dónde parece que se ubica el centro de simetría del cuadrado? ¿Qué ocurre si mueves el cuadrado  $ABCD$ ?
- b) Validación. Construye otro cuadrado  $ABCD$ .

- Usa la herramienta RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS para trazar las diagonales del cuadrado.
- Traza el simétrico del cuadrado con respecto del punto donde se intersecan las diagonales.

¿Cuál fue la respuesta del software?



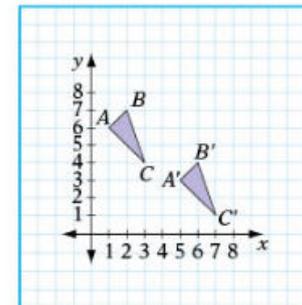
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Si es posible, utilicen nuevamente el programa GeoGebra para tratar de encontrar el centro de simetría de un pentágono regular. ¿Qué sucede? Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla y compás.

9.3. Traslaciones

Problema inicial

La siguiente figura muestra que el triángulo  $ABC$  se ha movido hasta ocupar la posición  $A'B'C'$ . ¿En qué ha consistido este movimiento?



En el siguiente recuadro, redacta el procedimiento que se siguió para mover el triángulo  $ABC$ .

Exploración y discusión

- a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo origen  $ABC$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo imagen  $A'B'C'$ ? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuántas unidades a la derecha se trasladó el triángulo  $ABC$ ? \_\_\_\_\_  
¿Y hacia abajo? \_\_\_\_\_

Una transformación geométrica es una correspondencia que se establece entre una figura, llamada origen, y otra que recibe el nombre de imagen. Son transformaciones geométricas las traslaciones, las rotaciones y las simetrías.  
En una *traslación*, todos los puntos de la figura se mueven la misma distancia y en la misma dirección.



d) Une cada vértice del triángulo origen con su homólogo del triángulo  $A'B'C'$ . ¿Cómo fue la traslación: horizontal, vertical u oblicua? Discute con un compañero tu respuesta.

e) ¿En qué casos una traslación puede describirse como la composición de dos traslaciones: una que desliza la figura en dirección horizontal y otra que la desliza en dirección vertical? \_\_\_\_\_



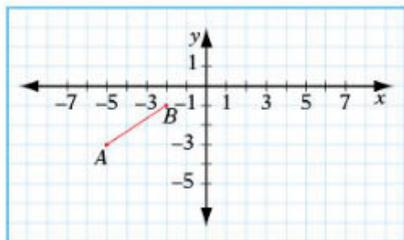
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales



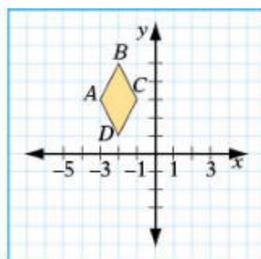
1. Las coordenadas de los extremos del segmento  $AB$  son  $A(-5, -3)$  y  $B(-2, -1)$ . Traza su imagen después de trasladarlo 6 unidades a la derecha y 1 hacia arriba.

¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del segmento imagen  $A'B'$ ? Discute tu respuesta con un compañero.



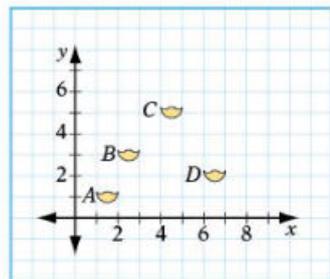
Una traslación puede expresarse mediante notación algebraica. Por ejemplo, si se quiere trasladar una figura 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo, puede escribirse:  $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$ .

2. Tracen la imagen del siguiente rombo con la traslación  $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 4)$ .



3. La traslación se utiliza para crear diseños y animaciones en la computadora. Usen la notación algebraica para describir las siguientes traslaciones

- a) De  $A$  a  $B$
- b) De  $B$  a  $C$
- c) De  $C$  a  $D$



4. ¿Es posible trasladar un segmento de modo que los segmentos origen e imagen no sean paralelos? ¿Por qué?

5. Supongan que una figura se transforma mediante una traslación. Supongan ahora que la misma figura se transforma mediante una simetría axial. ¿En qué se parecen las dos figuras transformadas? ¿En qué se diferencian?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Luego, elaboren una lista de las propiedades de las transformaciones geométricas: las simetrías, las rotaciones y las traslaciones. Escríbanlas en su cuaderno.

PROYECTO DEL BLOQUE

Elaborar diseños geométricos

Seleccionen una figura, aplíquene algunas de las propiedades de las transformaciones geométricas y expliquen cuáles de esas propiedades utilizaron. Sobre un pliego de papel bond, reproduzcan la figura original y la transformada tantas veces como sea posible; éste será su diseño de papel tapiz o decorativo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla y compás.

Contenido 10

Construcción de diseños mediante movimientos en el plano

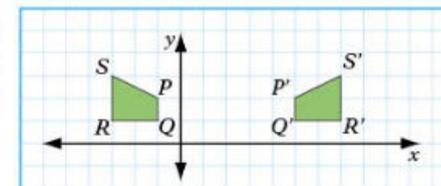
¿Alguna vez has creado un diseño? Si de una cartulina recortas varias figuras iguales (rombos, triángulos, rectángulos u otras), ¿cómo podrías colocarlas sobre una superficie plana de manera que se forme un diseño interesante?

Te recomendamos la lectura "De atrás hacia delante y de arriba hacia abajo", en Langdon, N. et al., *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, SEP, 2004.

10.1. ¿Qué transformaciones geométricas se utilizaron?

Problema inicial

En la figura, el trapecio  $P'Q'R'S'$  es la imagen del trapecio  $PQRS$ , después de algunas transformaciones. Por escrito, haz una descripción de esas transformaciones.



Exploración y discusión

- a) Marca con líneas discontinuas las transformaciones que identificaste; después, revisa tu propuesta de solución y corrígela si es necesario.
- b) ¿La imagen  $P'Q'R'S'$  puede ser producto de una sola transformación del origen  $PQRS$ ? ¿De cuál: una simetría central, una simetría axial o una traslación de  $PQRS$ ? Argumenta tu respuesta.
- c) ¿La imagen  $P'Q'R'S'$  puede ser resultado de dos transformaciones sucesivas (por ejemplo: una simetría axial y luego una traslación del origen  $PQRS$ )? Explica tu respuesta.
- d) ¿Puede ser resultado de dos transformaciones sucesivas, como una traslación y luego una simetría axial? Explica tu respuesta.
- e) ¿Cuál es, finalmente, tu propuesta? ¿El problema tiene sólo una solución o varias? ¿Cuáles son esas soluciones? Discútelas con argumentos con un compañero.

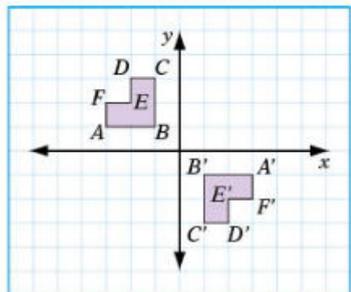


Coordinados por su profesor, presenten en el grupo sus respuestas. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

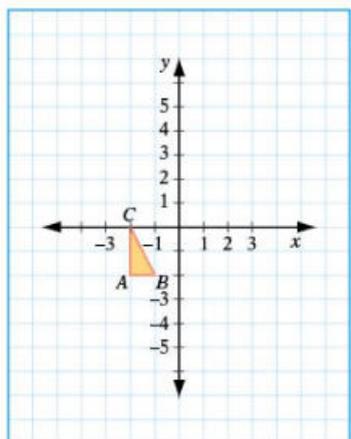
Actividades adicionales



1. ¿Mediante qué transformación o transformaciones se obtiene la imagen de la figura  $ABCDEF$ ? ¿Hay una solución o varias? Discute tus respuestas con un compañero.



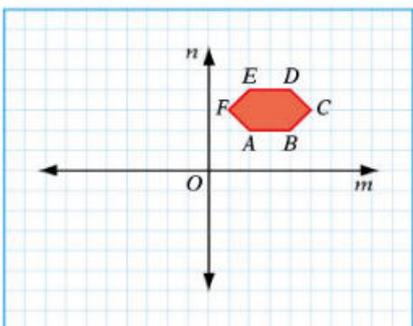
2. Apliquen dos transformaciones a la figura de la derecha: una traslación (3 unidades a la derecha y 5 hacia arriba) y una reflexión sobre el eje  $x$ .  
¿Cuál de los siguientes pares de coordenadas determinan un punto que no es vértice de la imagen final? Márquenlo con una "X".



- (2, -3)
- (1, -5)
- (3, -4)
- (1, -3)

3. Consideren la figura de la derecha. Después, tracen:

- El simétrico  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  del polígono  $ABCDEF$  con respecto a la recta  $m$ , y
- El simétrico  $A'B'C'D'E'F'$  del polígono  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  con respecto a la recta  $n$ .



- a) ¿Los polígonos  $ABCDEF$  y  $A'B'C'D'E'F'$  son simétricos con respecto a alguna de las dos rectas  $m$  o  $n$ ?
- b) Copien en su cuaderno el punto  $O$  y el polígono  $ABCDEF$ . Utilicen el compás y la copia que hicieron para buscar un procedimiento que permita pasar del polígono  $ABCDEF$  al polígono  $A'B'C'D'E'F'$ .
- c) ¿Por qué al procedimiento anterior se le llama *simetría de centro O*?



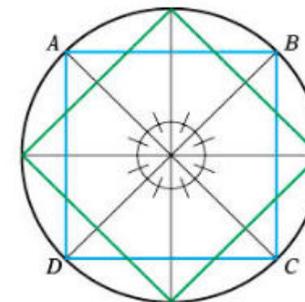
Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Contesten, además: dada una figura y un punto fuera de ella, ¿cómo obtener su simétrica con respecto a ese punto mediante dos simetrías axiales? Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás, papel transparente y un alfiler.

10.2. Diseños geométricos con transformaciones geométricas

Problema inicial

Con regla y compás, traza en tu cuaderno varias copias de la siguiente figura, de tal modo que el cuadrilátero  $ABCD$  sea un cuadrado de 6 cm por lado.



Colorea las figuras de manera que tengan un centro de simetría y algún eje de simetría.

Exploración y discusión

- a) Crea un diseño con cuatro colores diferentes, con un centro de simetría y ningún eje de simetría.
- b) Crea otro diseño utilizando el menor número de colores posible, de manera que tenga un centro de simetría y ningún eje de simetría.
- c) Junto con un compañero, crea un diseño utilizando el mayor número de colores posible y que tenga cuatro ejes de simetría. Expliquen los pasos que siguieron para realizar la investigación.



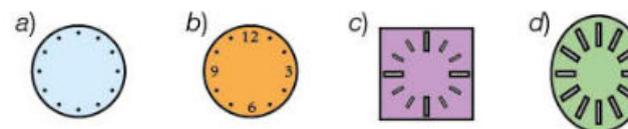
Con la ayuda de su profesor, expongan sus respuestas a las actividades anteriores. Asimismo, presenten el diseño que elaboraron y expliquen las transformaciones geométricas que aplicaron.

Actividades adicionales



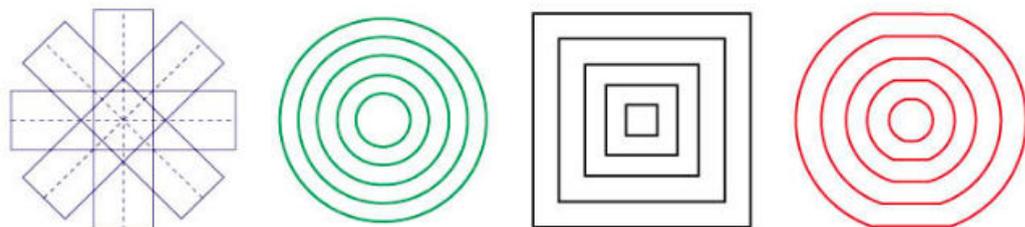
Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades.

1. Para cada inciso, calquen la figura en papel transparente. Colóquenla encima de la figura del libro y claven un alfiler en el centro de simetría de ambas figuras.



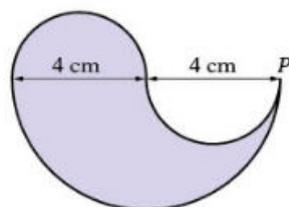
- a) Si dan un giro completo a la figura copiada, ¿en cuántas ocasiones coinciden las partes de ambas figuras?
- b) ¿Cuáles de estas figuras tienen simetría rotacional?

2. Analicen las siguientes figuras:



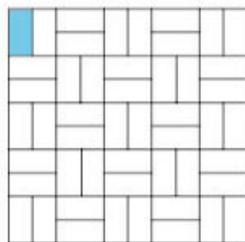
- a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada una?
- b) ¿Cuántos centros de simetría?
- c) ¿Cuáles tienen simetría rotacional?

3. La siguiente figura está formada por semicírculos.



- a) Utilicen regla y compás para reproducirla en su cuaderno con las medidas indicadas.
- b) Elaboren un diseño aplicando una o varias transformaciones geométricas. Por ejemplo, la simetría central con respecto al punto P.

4. ¿Qué transformaciones geométricas se aplicaron al rectángulo de color de la siguiente figura para obtener el cuadrado?



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar y analizar transformaciones en el plano:

- <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-transformaciones>
- <http://maticasmo.demas.com/transformaciones-en-el-plano/>
- <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/movimientos.htm>

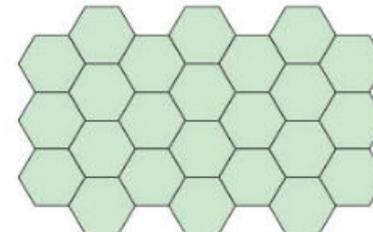
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás, tijeras y cartoncillo.

10.3. Teselaciones y movimientos en el plano

Problema inicial

La siguiente figura muestra que con mosaicos que tienen forma de hexágonos regulares iguales se puede recubrir un piso.



¿Qué transformación o transformaciones geométricas se aplican en esta situación? Escribe tu propuesta en el siguiente recuadro.

Exploración y discusión

- a) Resuelve el problema experimentalmente: recorta en cartoncillo varios hexágonos regulares iguales y realiza con ellos los movimientos que implican cada una de las transformaciones geométricas estudiadas. Por escrito, describe tus hallazgos en el siguiente recuadro.



- b) ¿Puede aplicarse la traslación para recubrir el plano con hexágonos regulares iguales? ¿De qué manera? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.
- c) ¿Es posible aplicar también la simetría axial? Expliquen de qué manera se haría?
- d) ¿Puede aplicarse la simetría central? Utilicen regla y compás para verificar su respuesta.



Con la ayuda de su profesor, muestren en el grupo la forma en que aplican las transformaciones geométricas para recubrir un piso, auxiliándose de cartoncillos hexagonales. Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

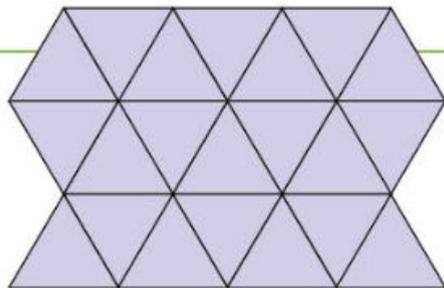
PROYECTO DEL BLOQUE

Elaborar diseños geométricos

Formen su propio teselado. Seleccionen el polígono a partir del cual formarán su teselado. Coloréenlo. Expliquen la técnica utilizada para realizarlo. En particular, señalen el polígono que da origen a su teselado. Pueden investigar sobre la obra del artista gráfico holandés M.C. Escher; en especial, en qué consiste el método "quita y pon" que utiliza.

Actividades adicionales

- En la siguiente figura puede apreciarse que también los triángulos equiláteros pueden usarse como mosaicos.
  - ¿Qué transformaciones geométricas se aplican en este caso?
  - ¿Puede aplicarse la simetría axial? ¿De qué manera?
  - ¿Puede aplicarse la traslación? Explica tu respuesta.
- ¿Qué transformaciones geométricas se aplican en cada uno de los siguientes diseños?



a)



--	--

b)



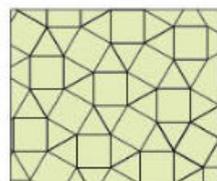
--	--

c)

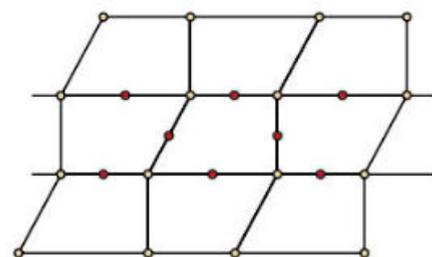


--	--

- En la figura de la derecha, ¿qué grupo de figuras se mueve por traslación? Utiliza colores para identificarlo.



- La figura de la derecha muestra una manera de recubrir el piso usando mosaicos con la forma de trapecios.
  - ¿Se aplica la traslación en este caso? ¿Se aplica la simetría axial? Explica tu respuesta.
  - En tu cuaderno, realiza la siguiente actividad:
    - Traza un trapecio cualquiera y marca el punto medio de cada uno de sus lados
    - Traza los simétricos de ese trapecio con respecto a cada uno de sus puntos medios.
    - ¿A qué conclusión llegas? Discútela con un compañero.



- Realicen la misma actividad, pero ahora con un triángulo escaleno. Pueden hacerlo también con el programa *GeoGebra*. ¿A qué conclusión llegan?



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo las respuestas a las actividades anteriores auxiliándose con figuras de cartoncillo. Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla graduada y escuadras.

# Contenido 11



## El teorema de Pitágoras

Los triángulos rectángulos tienen una propiedad conocida como *teorema de Pitágoras*, según la cual, en un triángulo rectángulo cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  unidades, respectivamente, se cumple la relación  $a^2 + b^2 = c^2$ . ¿Cómo podría verificarse la validez de este teorema? ¿Conoces alguna terna de números que cumplan esta condición?

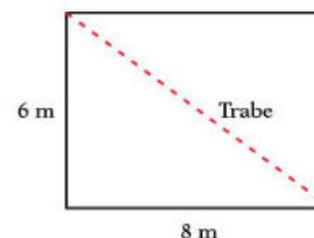
### 11.1. ¿Qué es el teorema de Pitágoras?

#### Problema inicial

Se han reforzado los muros de una escuela para evitar desastres en caso de terremoto. ¿Qué longitud tiene la **trabe** de refuerzo que se ha colocado diagonalmente en una pared de 8 m de longitud y 6 m de altura?

**Glosario**

**Trabe.** Viga de hierro o madera que sirve de refuerzo a una construcción.

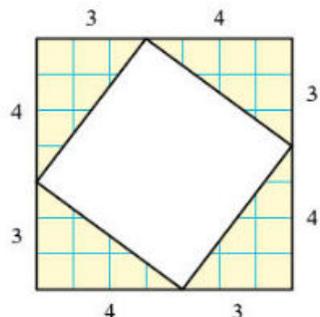


#### Exploración y discusión



- ¿Puedes hacer una estimación de la longitud de la trabe? ¿Medirá más de 6 m? ¿Más de 8 m? ¿Medirá más que la suma de 6 m y 8 m? Discute con un compañero tu estimación.
- En el recuadro, tracen la figura a escala (1 cm = 2 m) y después midan la longitud de la trabe. ¿Qué resultado encontraron?

- c) La figura siguiente es famosa porque ayuda a resolver problemas como éste. Está formada por un cuadrado dividido en cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado interior. ¿Cómo pueden encontrar el área del cuadrado interior? ¿Cuál es esa área?



- d) ¿Cómo pueden encontrar la medida del lado del cuadrado interior? ¿Cuánto mide?  
 e) Utilicen este procedimiento para encontrar la medida de la trabe del problema inicial.

Los lados de un triángulo rectángulo reciben nombres especiales: a los que forman el ángulo recto se les llama *catetos* y el opuesto al ángulo recto es la *hipotenusa*.

- f) ¿Cuánto miden los catetos de los triángulos rectángulos del problema inicial? ¿Y la hipotenusa?



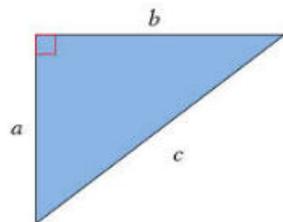
Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo los procedimientos y cálculos que usaron los equipos para resolver el problema. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**



1. Reúnete con un compañero para realizar la siguiente actividad:

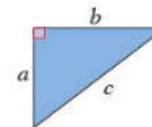
- a) Tracen un triángulo rectángulo como el de la figura, con  $a = 30$  mm y  $b = 40$  mm.



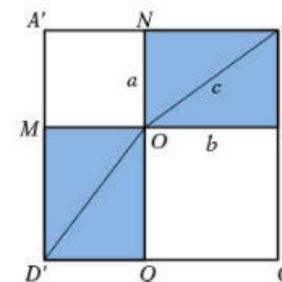
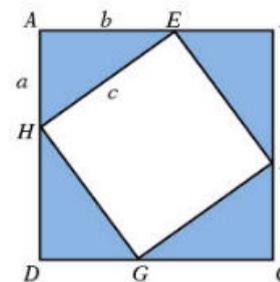
- b) Midan el lado  $c$  en milímetros y enseguida completen la siguiente tabla:

$a$	$b$	$c$	$a^2$	$b^2$	$a^2 + b^2$	$c^2$

- c) ¿Qué se puede concluir con respecto de los dos últimos resultados?  
 d) Recorten en cartoncillo 8 triángulos rectángulos iguales y representen las longitudes de sus lados con las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$ .



- e) Tracen dos cuadrados  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  cuyos lados midan  $(a + b)$ . Coloquen los triángulos sobre los cuadrados como se muestra en las siguientes figuras.

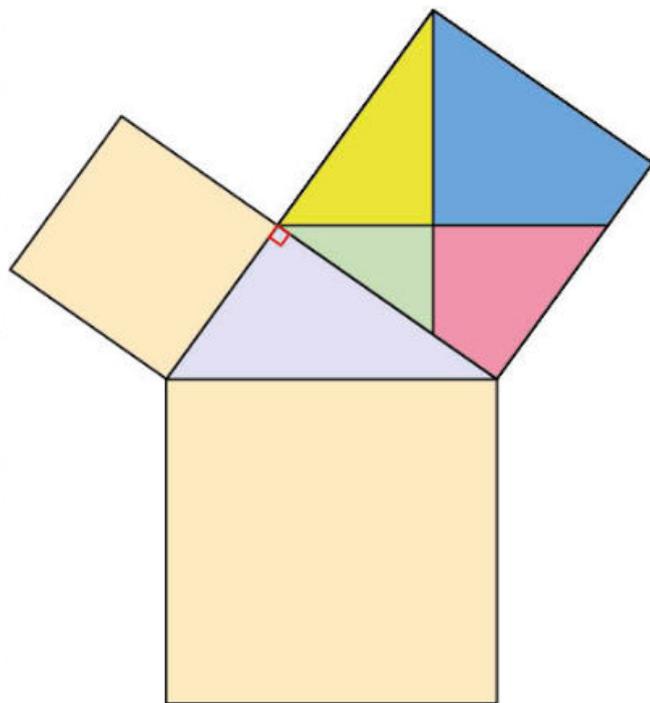


- f) ¿Por qué se puede afirmar que las medidas de los lados del cuadrilátero  $EFGH$  son iguales?  
 g) ¿Por qué  $\angle AEH + \angle BEF = 90^\circ$ ?  
 h) ¿Cuál es la medida del  $\angle HEF$ ?  
 i) ¿Por qué puede afirmarse que el cuadrilátero  $EFGH$  es un cuadrado?  
 j) ¿Por qué las áreas de las superficies de color de cada cuadrado son iguales?  
 k) Comparen el área del cuadrado interior de la figura de la izquierda con la suma de las áreas de los cuadrados interiores de la figura de la derecha. ¿Qué relación encuentran? Justifiquen su respuesta.  
 l) ¿Qué relación encuentran entre los valores de  $c^2$  y de  $(a^2 + b^2)$ ?

Esta propiedad de los triángulos rectángulos se conoce con el nombre de *teorema de Pitágoras*.

- m) En el siguiente recuadro, escriban esta propiedad empleando los términos *catetos* e *hipotenusa*.

2. Sobre cada uno de los lados del triángulo de la derecha se ha construido un cuadrado, uno de ellos multicolor. ¿Qué relación habrá entre las áreas de cada uno de esos cuadrados y los lados del triángulo?



- Copien la figura y recorten las cinco piezas que forman los dos cuadrados pequeños.
- Coloquen las cinco piezas sobre el cuadrado mayor de manera que puedan cubrirlo totalmente.
- Expliquen de qué manera este juego confirma el teorema de Pitágoras.

3. Luis construyó un triángulo  $MNP$  con las siguientes medidas:  $\overline{MN} = 3$  cm,  $\overline{NP} = 4$  cm y  $\overline{PM} = 5$  cm.

- Calculen el cuadrado de cada una de esas longitudes.
- ¿Qué relación puede escribirse entre estos tres cuadrados?
- Tracen un triángulo con las medidas que utilizó Luis. ¿Qué propiedad parece tener este triángulo?
- Después Luis construyó otro triángulo  $EFG$  con las siguientes medidas:  $\overline{EF} = 4$  cm,  $\overline{FG} = 7$  cm y  $\overline{GE} = 9$  cm. Para este nuevo triángulo, contesten las mismas preguntas de los incisos a), b) y c).
- Ahora completen el siguiente enunciado:  
Si, en un triángulo, el cuadrado de un lado es igual a \_\_\_\_\_ de los \_\_\_\_\_ de los otros lados, entonces el triángulo es rectángulo y su hipotenusa es el lado más largo.

A esta propiedad de los triángulos rectángulos se le llama recíproco del teorema de Pitágoras.

4. Las siguientes son las medidas (en centímetros) de los lados de algunos triángulos. ¿Cuáles de ellos son triángulos rectángulos? Márcalos con una (✓).

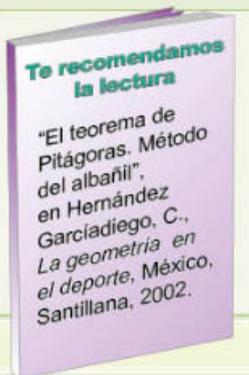
- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 5, 12, 13 | <input type="checkbox"/> 7, 24, 25   |
| <input type="checkbox"/> 6, 9, 12  | <input type="checkbox"/> 8, 15, 17   |
| <input type="checkbox"/> 7, 15, 16 | <input type="checkbox"/> $5k, 12k, 13k$ (donde $k$ es cualquier número entero positivo). |



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Uso del teorema de Pitágoras

La resbaladilla de un parque infantil, la columna que la sostiene y el piso forman un triángulo rectángulo. Si se sabe que la longitud de la resbaladilla es de 10 m y su bajada está a 8 m de la base de la columna, ¿qué altura tiene esta columna?



### 12.1. Problemas sobre el teorema de Pitágoras

#### Problema inicial

Calcula  $4^2 + 5^2$  y encuentra un método para trazar, con regla y compás, un cuadrado cuya área sea  $41 \text{ cm}^2$ . En tu cuaderno, escribe tus cálculos y el método que hallaste.

#### Exploración y discusión

a) ¿Qué pasos seguirías para construir un cuadrado de  $41 \text{ cm}^2$  de área? Anótalos en tu cuaderno.



b) ¿Encuentras alguna relación entre  $4^2 + 5^2$  y un cuadrado de  $41 \text{ cm}^2$  de área? \_\_\_\_\_ ¿En qué consiste esa relación? Discútelo con un compañero. \_\_\_\_\_

c) Un cuadrado de área  $41 \text{ cm}^2$  mide por lado  $\sqrt{41}$  cm. Este valor difícilmente podría asignarse con una regla graduada. ¿Se podría encontrar esa longitud con regla y compás? \_\_\_\_\_ ¿De qué manera? \_\_\_\_\_

d) Si aplicaron el teorema de Pitágoras para resolver el problema, ¿qué representan los valores 4, 5 y  $\sqrt{41}$ ? \_\_\_\_\_

e) ¿Cuál es el valor de  $\sqrt{41}$ , aproximado a décimas? \_\_\_\_\_ ¿A cuántos milímetros equivale, aproximadamente,  $\sqrt{41}$  cm? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

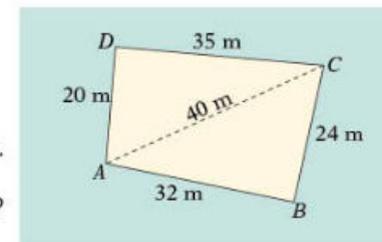
#### Actividades adicionales



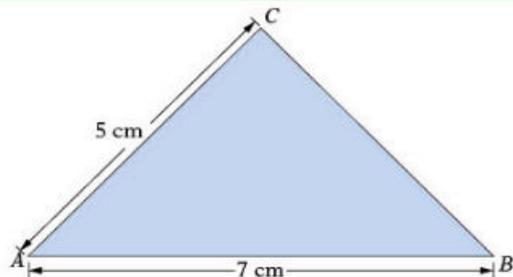
Reunidos en parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. La figura muestra el plano que elaboró un topógrafo.

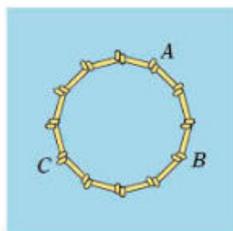
- Él dice que los lados  $AB$  y  $BC$  son perpendiculares entre sí. ¿Es verdad esto? ¿Cómo lo pueden justificar?
- Los lados  $AD$  y  $CD$  ¿son también perpendiculares entre sí? ¿Por qué?



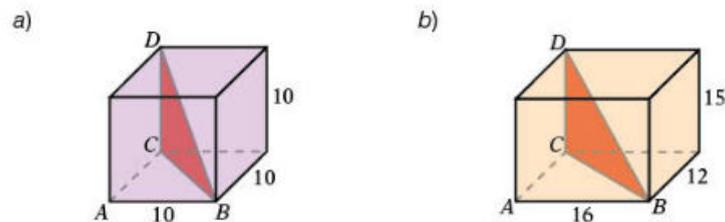
2. Las medidas de los lados de un triángulo isósceles son las que se indican en la figura. Calculen el área del triángulo, redondeada a milímetros cuadrados.



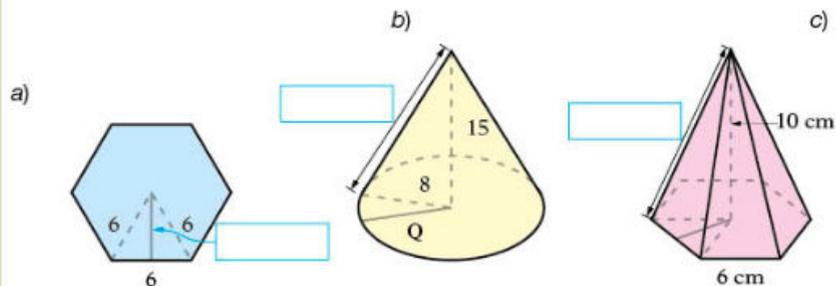
3. Tracen en su cuaderno un triángulo cuyos lados midan 5.3 cm, 4.5 cm y 2.8 cm. Con estos datos, ¿es posible calcular su área? Justifiquen su respuesta.  
 4. Desde la Antigüedad se sabe construir los ángulos rectos mediante una cuerda que tiene 12 nudos igualmente espaciados. El procedimiento consiste en fijar bastones en los nudos A, B y C, tensar la cuerda entre los bastones y finalmente clavar los bastones en el suelo. Expliquen la razón por la cual el triángulo obtenido es rectángulo.



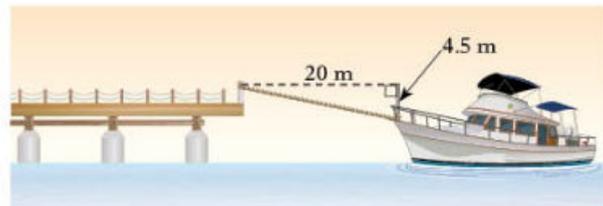
5. Calculen la longitud de las diagonales de los siguientes cuerpos geométricos. En cada caso, primero deben calcular la longitud de  $\overline{BC}$  y luego la de la diagonal  $\overline{BD}$ .



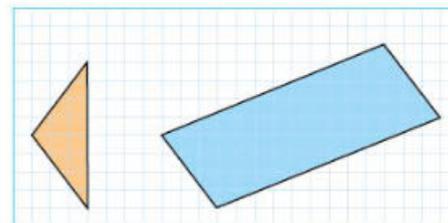
6. Calculen la longitud de la apotema del hexágono, la de la generatriz del cono y la de la arista de la pirámide hexagonal.



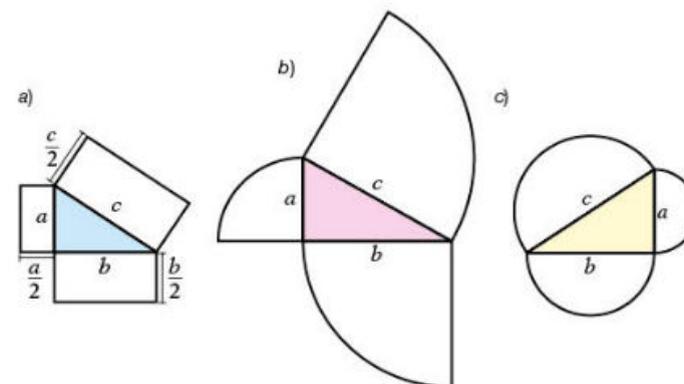
7. ¿Qué longitud mínima tiene la cuerda que sujeta al barco?



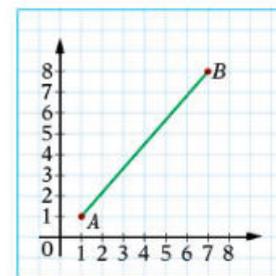
8. Encuentren el perímetro del triángulo y del cuadrilátero de la siguiente figura.



9. Se han construido figuras semejantes sobre los lados de triángulos rectángulos. En cada caso, verifiquen que la suma de las áreas construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.



10. Consideren el segmento  $AB$  construido en el plano cartesiano, para contestar las cuestiones que se plantean.



- a) ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del segmento  $AB$ ?  
 b) Localicen un punto  $C$  del plano cartesiano de modo que se forme un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los ejes. ¿Este punto es único?  
 c) ¿Cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo  $ABC$ ?  
 d) ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa  $AB$ ?

Usamos las TIC

• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar el teorema de Pitágoras:  
 - <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-el-teorema-de-pitagoras>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos realizados por los equipos para resolver los problemas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Problemas sobre cálculo de la probabilidad de eventos

Si se lanzan tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salga al menos un sol? ¿Y la de que no salga ningún sol? ¿Y la de que sólo salgan soles?

### 13.1. Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

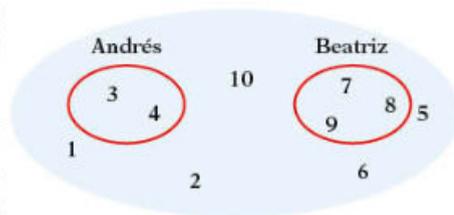
#### Problema inicial

Andrés y Beatriz compraron boletos para una rifa que consta de 10 números: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10]. Andrés compró los números [3 y 4], y Beatriz, los números [7, 8 y 9]. ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos gane el premio? Justifica tu respuesta.

#### Exploración y discusión

a) ¿Cómo puedes calcular esa probabilidad? Escribe tu propuesta en el recuadro.

b) El esquema muestra la posición de todos los resultados posibles (espacio muestral) de la rifa:



¿Cuántas posibilidades tiene de ganar Andrés? ¿Cuál es la probabilidad de que gane, según la fórmula de la probabilidad teórica?

c) ¿Cuántas posibilidades de ganar tiene Beatriz? ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

d) Si estos eventos se designan de la siguiente manera:  $A =$  "gana Andrés" y  $B =$  "gana Beatriz", ¿cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos ( $A$  o  $B$ )? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.



e) Lean la siguiente información y enseguida contesten.

Dos eventos  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno evita la ocurrencia del otro y no tienen resultados favorables en común. Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos se halla mediante la suma de las dos probabilidades:  $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ .

f) ¿Por qué los eventos  $A =$  "gana Andrés" y  $B =$  "gana Beatriz" son mutuamente excluyentes?

g) Calcula la probabilidad del evento ( $A$  o  $B$ ).

h) Si los eventos  $C =$  "gana Carmen" y  $D =$  "gana Daniel" no son mutuamente excluyentes, ¿qué números de la rifa pudieron haber comprado Carmen y Daniel?

i) Escriban una situación por la cual puede ocurrir que los eventos  $C$  y  $D$  no sean mutuamente excluyentes.

j) ¿Cómo se calcula la probabilidad de dos eventos que no son mutuamente excluyentes?



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo las respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales

1. Juan y Pedro juegan al lanzamiento de tres monedas. Juan gana si sale exactamente un sol, y Pedro, si salen exactamente dos soles. ¿Cuál es la probabilidad de que en un juego haya un ganador?

a) Dibuja un esquema para mostrar la posición de todos los resultados posibles (espacio muestral) de un lanzamiento, indicando los resultados con los cuales ganaría el juego cada uno.

b) Explica por qué los eventos  $J =$  "gana Juan" y  $P =$  "gana Pedro" son mutuamente excluyentes.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan?

d) ¿Y la de que gane Pedro?

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento ( $J$  o  $P$ ), es decir, de que haya un ganador?

2. Vianey y Miriam juegan al lanzamiento de dos dados. Vianey gana si la suma de los dados es 6, y Miriam, si la suma es 8. ¿Cuál es la probabilidad de que en un juego haya una ganadora?

Para la siguiente sesión requieres traer dos dados.

a) Completa la siguiente tabla de modo que muestre todos los resultados que pueden salir al lanzar dos dados.

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1 = 2					
2				2 + 4 = 6		
3						
4						
5						
6						

b) ¿Cuántos son los resultados que pueden obtenerse al lanzar dos dados? Dibuja un esquema de manera que muestre los resultados con los cuales ganaría el juego cada una.

- c) Explica por qué los eventos  $V = \text{"gana Vianey"}$  y  $M = \text{"gana Miriam"}$  son mutuamente excluyentes.  
 d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Vianey?  
 e) ¿Y la de que gane Miriam?  
 f) ¿Cuál es la probabilidad del evento ( $V$  o  $M$ ), es decir, de que haya una ganadora?



3. Junto con un compañero, realicen la siguiente actividad: lancen un par de dados 50 veces y registren las veces en que la suma de los dados es 6 o la suma de los dados es 8.

- a) De acuerdo con los resultados que obtuvieron, ¿cuál es la probabilidad frecuencial del evento "la suma es 6 o es 8"?  
 b) ¿Cuál es su diferencia con respecto de la probabilidad teórica?



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



- Observa el video "¿Cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes?" para reconocer situaciones aleatorias donde los eventos son mutuamente excluyentes:

– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/5/1378>

- Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-probabilidad-y-combinatoria>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

13.2. Cálculo de la probabilidad de eventos complementarios

Problema inicial

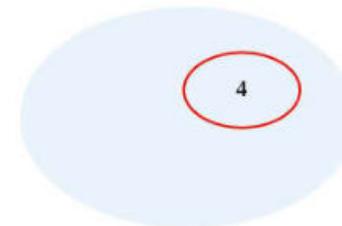
Si lanzas un dado, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos?:

- "Obtener un 4". \_\_\_\_\_
- "Obtener un número distinto de 4". \_\_\_\_\_

¿Cuál es la suma de estas probabilidades? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

Exploración y discusión

a) Completa el siguiente esquema de modo que muestre la posición de todos los resultados posibles (espacio muestral) del lanzamiento del dado:



b) ¿Cuántas posibilidades hay de que salga el 4? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar el dado, salga el 4? \_\_\_\_\_ ¿Y de que no salga el 4? \_\_\_\_\_

c) Designaremos estos eventos de la siguiente manera:

- $A = \text{"Obtener un 4"}$
- $A^c = \text{"Obtener un número distinto de 4"}$

¿Cuál es la suma de las probabilidades de estos eventos?:  $P(A) + P(A^c) =$  \_\_\_\_\_

d) De acuerdo con la ecuación anterior, ¿cómo se puede obtener la probabilidad de  $A$ ?:

$P(A) =$  \_\_\_\_\_

Si la suma de dos eventos es 1, los eventos se llaman eventos *complementarios*. Por tanto, la probabilidad de que ocurra un evento  $A$  es igual a 1 menos la probabilidad de que no ocurra.

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

e) ¿Por qué dos eventos complementarios son también mutuamente excluyentes?

f) Responde en el recuadro: ¿en qué se diferencian los eventos complementarios de los eventos mutuamente excluyentes? Puedes apoyarte con algún ejemplo.

g) ¿En qué se diferencian los esquemas de los eventos mutuamente excluyentes y los de los eventos complementarios?



Con la ayuda de su profesor, expongan en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores, expresando en cada caso las razones en que las basan. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

1. Si se lanzan tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de que salga un resultado distinto a exactamente dos águilas y un sol?

- a) Si se sabe que la probabilidad de que salgan exactamente dos águilas y un sol es  $\frac{3}{8}$ , ¿cuál es la probabilidad de que ese evento no ocurra?:  $P^c =$  \_\_\_\_\_.
- b) Elabora un esquema con el espacio muestral de este experimento, de modo que represente esta situación.

2. Se lanzan dos dados y se suman los resultados.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea 12? ¿Y la de que la suma no sea 12?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 7?
- c) ¿Y de que la suma sea mayor que 6?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que los dados presenten números iguales?
- e) ¿Y de que no presenten números iguales?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

# EVALUACIÓN

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Núm. de lista \_\_\_\_\_



I. Colorea el alvéolo con la respuesta correcta en cada caso.

1. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación  $(x - 2)(x + 5) = 0$ ?

- A  $x_1 = 2, x_2 = -5$
- B  $x_1 = 2, x_2 = 5$
- C  $x_1 = -2, x_2 = 5$
- D  $x_1 = -2, x_2 = -5$

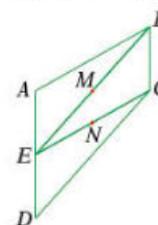
2. Las medidas de los lados de un rectángulo son 4 m y 7 m respectivamente. ¿Cuánto se debe aumentar uno de los lados, para que, disminuyendo al mismo tiempo el otro en la misma longitud, el área sea 24 m<sup>2</sup>?

- A 2 m
- B 3 m
- C 4 m
- D 5 m

3. Todas las ecuaciones siguientes tienen una solución comprendida entre 1 y 2, excepto:

- A  $(2x - 3)(3x + 4) = 0$
- B  $(5x - 7)(4x + 1) = 0$
- C  $(x + 2)(10x - 12) = 0$
- D  $(x - 5)(x + 6) = 0$

4. En la figura, los puntos M y N son puntos medios de EB y EC, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



- A Los triángulos BEC y EBA son simétricos con respecto del eje EB.
- B Los triángulos BEC y DCE son simétricos con respecto del punto N.
- C El triángulo DCE es resultado de una traslación del triángulo EBA.
- D Los puntos A y C son simétricos con respecto del punto M.

5. Los ejes de simetría de un rectángulo son...

- A Las diagonales.
- B Las mediatrices de los lados.
- C Las bisectrices de sus ángulos.
- D Los lados opuestos.

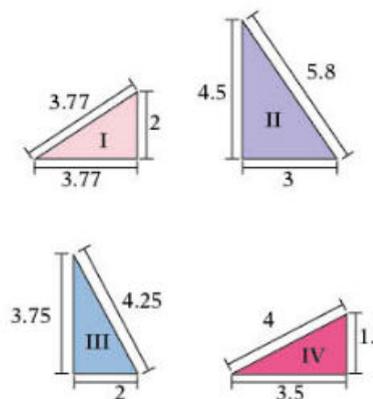
6. Si, en una simetría axial, un punto A' es simétrico de un punto A, y un punto B' es simétrico de un punto B, entonces...

- A Los segmentos A'B' y AB tienen la misma longitud.
- B El segmento A'B' es paralelo al segmento AB.
- C El segmento A'B' es perpendicular al segmento AB.
- D El segmento A'B' corta por la mitad al segmento AB.

7. El eje de simetría de un triángulo isósceles ABC con vértice en A es...

- A La base BC.
- B La mediatriz de la base BC.
- C La mediatriz del lado AB.
- D La bisectriz del ángulo B.

8. Con base en sus medidas, ¿cuál de los siguientes triángulos es un triángulo rectángulo?



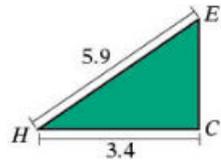
- A Triángulo I
- B Triángulo II
- C Triángulo III
- D Triángulo IV

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Elaborar diseños geométricos

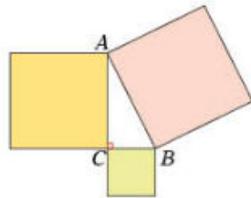
*Cierre del proyecto.* Elabora una descripción de tu teselado donde se indique el procedimiento que seguiste, el polígono a partir del cual lo formaste y por qué. Enmarca tu teselado. Puedes utilizar una cartulina de color como base para pegarlo. En el grupo, realicen una exposición con sus cuadros y tapices. Inviten a compañeros de otros grupos y grados para que conozcan su trabajo y sobre transformaciones geométricas y construcción de teselados.

9. ¿Qué igualdad puede escribirse con respecto al triángulo rectángulo  $EHC$ ?



- A  $EC^2 = 5.9^2 + 3.4^2$
- B  $EC = 5.9 + 3.4$
- C  $5.9^2 = 3.4^2 + EC^2$
- D  $EC = 5.9 - 3.4$

10. La siguiente figura está formada por el triángulo  $ABC$  (rectángulo en  $C$ ) y tres cuadrados de color. Se sabe que  $AC = 8$  cm y  $BC = 4$  cm. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



- A 60
- B 80
- C 100
- D 144

11. ¿Cuál es el valor de  $x$  en la expresión:  $11^2 + x^2 = 61^2$ ?

- A 51
- B 54
- C 57
- D 60

12. ¿Cuánto mide, aproximadamente, cada una de las diagonales de un rectángulo que mide 12 cm de largo y 8 cm de ancho?

- A 13.42 cm
- B 14.42 cm
- C 15.42 cm
- D 16.42 cm

Utiliza la siguiente información para contestar las preguntas 13 y 14: Luis y Carmen juegan a lanzar un dado. Luis gana si aparece un múltiplo de 3, y Carmen, si aparece un divisor de 10.

13. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Luis?

- A  $\frac{1}{5}$
- B  $\frac{2}{5}$
- C  $\frac{1}{3}$
- D 1

14. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un juego, haya un ganador?

- A  $\frac{3}{5}$
- B  $\frac{4}{5}$
- C  $\frac{5}{6}$
- D 1

Utiliza la siguiente información para contestar las preguntas 15 y 16: Teresa y Julio juegan con una urna que contiene cinco canicas: dos son azules y tres son rojas. Teresa gana si, al sacar una canica al azar, resulta que es azul; Julio gana si la canica es roja.

15. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Teresa?

- A  $\frac{2}{5}$
- B  $\frac{3}{5}$
- C  $\frac{2}{3}$
- D  $\frac{1}{2}$

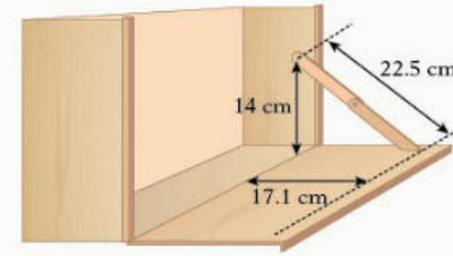


16. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un juego, haya un ganador?

- A  $\frac{3}{5}$
- B  $\frac{4}{5}$
- C  $\frac{5}{6}$
- D 1

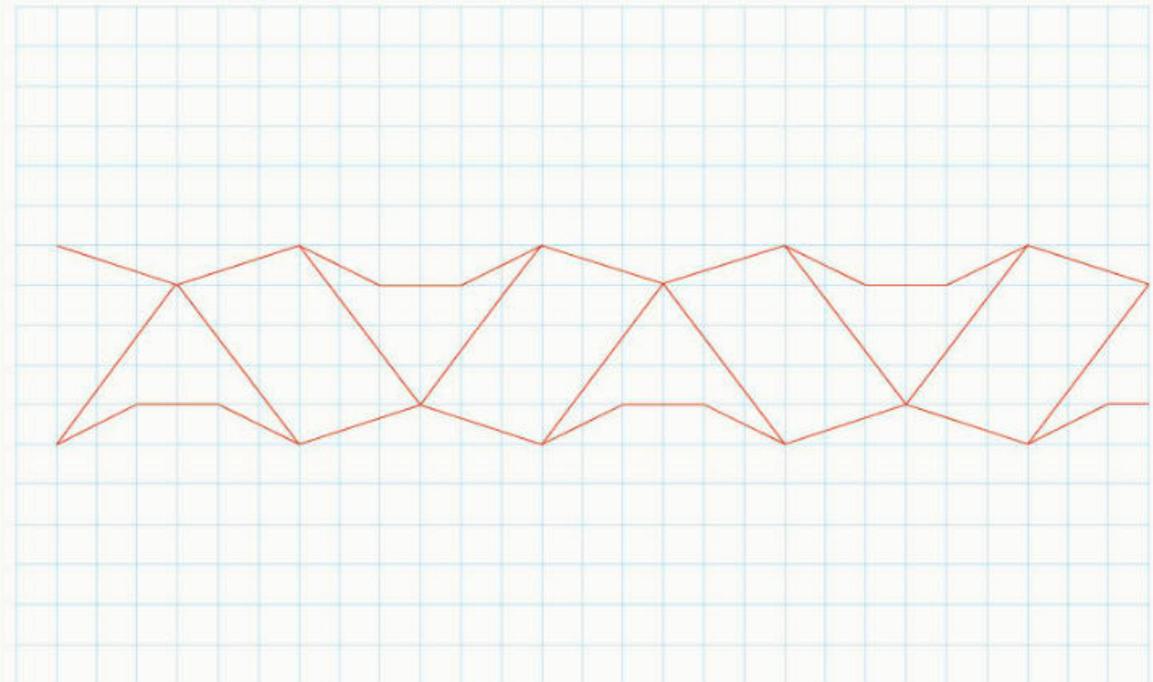
II. Resuelve lo siguiente.

1. La mesita del escritorio de Raúl está detenida por una regla plegable de 22.5 cm de longitud. Siempre que Raúl pone sus lápices sobre la mesita, ruedan y caen al suelo. ¿Qué modificaciones tiene que hacer en su escritorio para evitarlo?



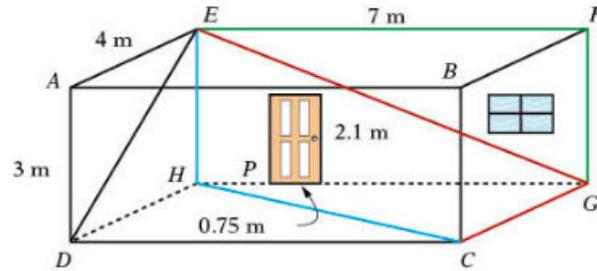
2. El siguiente friso se obtuvo a partir de un motivo simple, llamado *motivo mínimo*.

- a) Identifica el motivo mínimo y márcalo con azul.
- b) Traza los ejes o centros de simetría que se aplicaron sucesivamente.



## Un edificio de departamentos

La siguiente figura representa la sala de un departamento. Un electricista debe colocar cables para enlazar los puntos  $E$  y  $C$ , en donde colocará unas lámparas, y tiene tres posibilidades de hacerlo, marcadas en la figura en rojo, verde y azul.



1. ¿Cuál de las tres posibilidades debe elegir el electricista para que la longitud del cable sea la menor posible? Justifica tu respuesta.

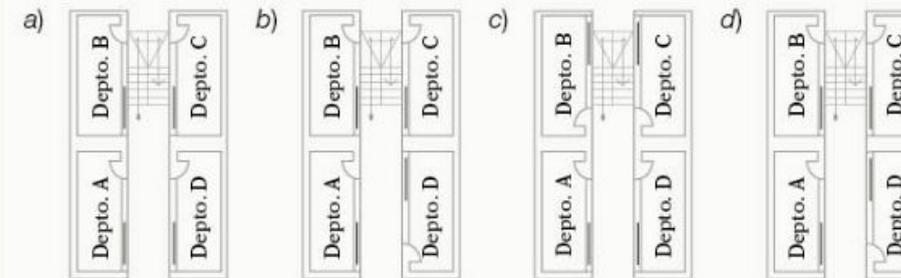
2. Si se elige la ruta roja, ¿cuál es la mayor distancia que puede tener  $HP$  para no desviar la dirección del cable? Justifica tu respuesta.

- a) 1.35 m      b) 0.75 m      c) 3.0 m      d) 3.5 m

3. Cada piso del edificio consta de cuatro departamentos. Si dos departamentos comparten una pared, la puerta y la ventana de uno están dispuestas de forma simétrica con respecto del otro departamento. Supón que el departamento de la figura anterior es el A, y que los otros son B, C y D, como se muestra en la figura.



¿Cómo están ubicadas la puerta y la ventana del departamento C?



4. A partir de los datos del departamento A que aparecen en el plano, completa los croquis de los departamentos B, C y D aplicando traslaciones. Justifica tu respuesta.



¿Qué tanto has logrado los aprendizajes esperados? Identifica las situaciones que eres capaz de resolver y márcalas con una (✓). Puedo resolver problemas...

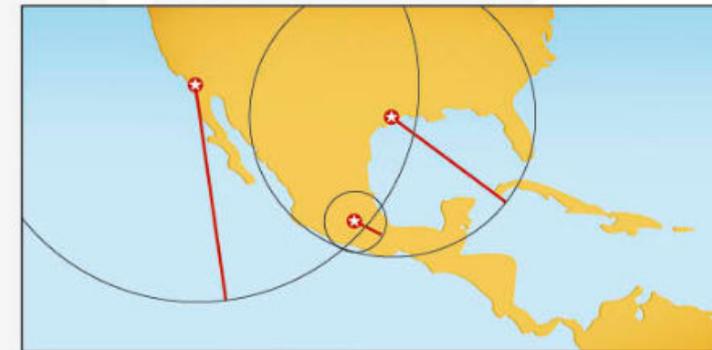
... que implican factorizar ecuaciones cuadráticas, como:	
<input type="checkbox"/> $x^2 - 10x = 0$	<input type="checkbox"/> $x^2 = 64$
<input type="checkbox"/> $x^2 = 3x - 2$	
<input type="checkbox"/> Encontrar una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 1 y -3. Escribirla en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ .	<input type="checkbox"/> El producto de dos números es 84. Uno es 5 unidades mayor que el otro. ¿Cuáles son los números?
... aplicando propiedades de la rotación y traslación de figuras, como:	
<input type="checkbox"/> Cuando se traza el simétrico de una figura, ¿qué propiedades de la figura original se conservan en la simétrica?	<input type="checkbox"/> Cuando una figura se traslada una cierta distancia en una dirección dada, ¿qué propiedades se conservan?
... aplicando transformaciones geométricas para construir diseños, como...	
<input type="checkbox"/> ... la teselación de un plano con triángulos usando la simetría central.	<input type="checkbox"/> ... frisos usando las simetrías axial y central combinadas.
... aplicando el teorema de Pitágoras, como:	
<input type="checkbox"/> Calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado que mide 12 m por lado.	<input type="checkbox"/> Calcular la longitud de la apotema de un hexágono regular de 8 cm por lado.
... calculando la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios, como:	
<input type="checkbox"/> Juan y María juegan a lanzar dos dados. Juan gana si cae la suma 4, y María, si cae la suma 9. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un ganador?	<input type="checkbox"/> En otro juego, Juan gana si cae una suma menor que 7, y María, si cae una suma mayor que 6. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un ganador?

Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido con el estudio de este bloque.	Plantea un problema que ahora ya puedas resolver con los conocimientos y habilidades que desarrollaste en este bloque.
1. _____ 2. _____	_____
Escribe un problema planteado en los temas de este bloque, cuya resolución se te haya dificultado.	¿En qué tema o temas te gustaría tener más ayuda y por qué?
_____	_____
En este bloque, ¿en qué consistió tu participación en la resolución de los problemas planteados?	Cuando en tu equipo un compañero daba una respuesta errónea a un problema propuesto, ¿de qué manera mostraste tu desacuerdo?
_____	_____

## ¿Quiénes utilizan la geometría?

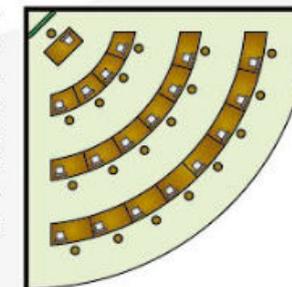
La ingeniería, la arquitectura, la geología, el diseño industrial y la escultura son algunos campos de la actividad humana en que el conocimiento y uso de la geometría son esenciales.

Así, los sismólogos (geólogos especializados en el estudio de los terremotos) la utilizan, por ejemplo, para localizar el epicentro de un terremoto, cuando varios observatorios se encuentran en comunicación. Como cada observatorio puede calcular la distancia a la cual ocurrió el sismo, si se trazan círculos tomando como centro el observatorio y como radio la distancia al epicentro, el punto donde se cortan los círculos corresponde al lugar del terremoto.



Localización de un terremoto ocurrido en las costas de Guerrero, mediante los datos aportados por los observatorios de Houston, Tijuana y la Ciudad de México.

Un arquitecto utiliza la geometría, por ejemplo, para diseñar un aula en la que 18 alumnos pueden sentarse ante una computadora y mostrar su trabajo en una amplia pantalla que se halla al frente. Los pasillos tienen el espacio suficiente para que el profesor pueda transitar por ellos y revisar el trabajo de los alumnos.



Diseño a base de arcos circulares.

## PROYECTO DEL BLOQUE

### Medir distancias y alturas inaccesibles

Hace más de dos mil años, los griegos aplicaban la proporcionalidad y las figuras semejantes en las artes, las ciencias y la ingeniería. Así, Tales de Mileto asombró a los egipcios cuando determinó la altura de una de las mayores pirámides haciendo una simple medida en el suelo, y Eratóstenes calculó con una precisión notable la circunferencia de la Tierra a partir de ciertas observaciones.

Investiguen en equipo de qué manera aplicaron esos conceptos para realizar sus cálculos. En este bloque, los contenidos 15 y 16 te ayudarán a realizar el proyecto.

# BLOQUE

# III

## Aprendizajes esperados:

El alumno:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

## La fórmula general cuadrática

El siguiente problema fue planteado por Al-Juarizmi (matemático árabe de la Edad Media): "El cuadrado de un número más 10 veces el mismo número da 39. ¿Cuál es el número?" ¿Qué respuesta darías?

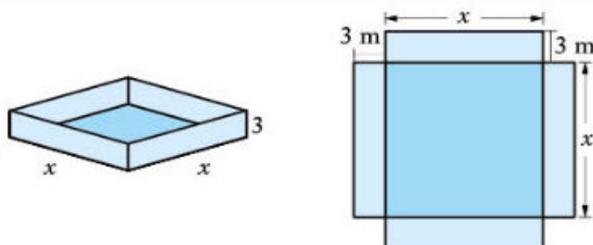
Te recomendamos la lectura

"Inconmensurables" y otros temas, en Marván, L. M., Representaciones numéricas, México, Santillana, 2002a.

### 14.1. Aplicación de la fórmula general

#### Problema inicial

Una alberca de fondo cuadrado tiene una profundidad de 3 m. Si su superficie interior, formada por el fondo y las caras laterales, mide  $133 \text{ m}^2$ , ¿cuánto mide por lado?

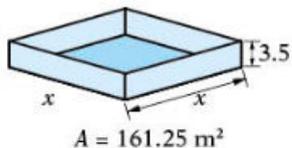


#### Exploración y discusión

- ¿Cuánto suman las áreas de las cinco partes de la alberca?
- Si sabemos que el área de la superficie interior de la alberca es  $133 \text{ m}^2$ , ¿qué ecuación cuadrática puede plantearse con esta información? Resuelve el problema por tanteo o mediante la factorización. ¿Cuál es la solución del problema? Escribe tus respuestas en el siguiente recuadro.

- ¿Cuánto mide por lado la alberca? Compara y discute tu respuesta con un compañero.

Si, en el problema inicial, la profundidad de la alberca fuera de 3.5 m y el área interior de  $161.5 \text{ m}^2$ , la ecuación que resuelve el problema modificado es  $x^2 + 14x - 161.25 = 0$ . Intenta resolverla por tanteo o factorización.



Como observaste, la resolución de la ecuación  $x^2 + 14x - 161.25 = 0$  se dificulta si usas tanteo o factorización. Para estos casos conviene que conozcas y utilices la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, que es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se obtiene de despejar  $x$  de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ . En ella, el signo  $\pm$  significa que hay dos soluciones: una debido al signo (+) y la otra al signo (-).

- Completen la siguiente tabla para resolver esta ecuación con la fórmula general. Tengan cuidado al sustituir los valores, así como al realizar las operaciones.



Ecuaciones	Coeficientes			Fórmula general cuadrática	
				Primera solución	Segunda solución
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c	$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x^2 + 14x - 161.25 = 0$					

- ¿Cuáles son los coeficientes de la ecuación  $x^2 + 14x - 161.25 = 0$ ?
- ¿Cuáles son las soluciones de esa ecuación?
- ¿Qué representan las soluciones de la ecuación en el contexto del problema?

Observen que una solución es negativa; esta solución se descarta porque la alberca sólo tiene dimensiones positivas.

- En el contexto del problema, ¿cuánto mide la alberca por lado? ¿Cuál es el área del fondo de la alberca? ¿Cuál es el área de las cuatro caras laterales?



Coordinados con su profesor, expongan y argumenten en el grupo la manera en que aplicaron la fórmula general cuadrática para resolver el problema anterior. Comprueben que la suma de las áreas de las cinco partes de la alberca es  $161.25 \text{ m}^2$ . Utilicen la fórmula general cuadrática para resolver la primera ecuación.

#### Actividades adicionales

- Dos de las siguientes ecuaciones no son cuadráticas. ¿Cuáles son? Subráyalas.

- |                             |                           |                                  |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| a) $(x + 3)^2 = x^2 + 5$    | c) $(x + 1)(x + 2) = 15$  | e) $(2x + 1)(2x + 3) = 2 + 4x^2$ |
| b) $(2x + 1)^2 = (x + 1)^2$ | d) $(3x + 2)^2 = 12x + 6$ | f) $(2x + 1)(3x + 3) = 9$        |



2. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general. Antes de aplicar la fórmula, escribe cada ecuación en la forma general  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Ecuación	Ecuación en forma general	Soluciones
a) $6x^2 - 10 = 4x$		
b) $(x + 3)(x + 2) = 0$		
c) $6x^2 - 5x = 9$		
d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$		

3. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general.

Ecuación	Primera solución ( $x_1$ )	Segunda solución ( $x_2$ )
a) $x^2 + 7x + 12 = 0$		
b) $x^2 + 8x + 7 = 0$		
c) $x^2 - 5x + 6 = 0$		
d) $x^2 + 6x + 8 = 0$		
e) $x^2 - 12x + 20 = 0$		
f) $2x^2 + 3x - 1 = 0$		

4. Encuentra, mediante una ecuación cuadrática, dos números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea 2100.



- Si uno de los números se representa con la literal  $x$ , el otro deberá representarse mediante la expresión  $(100 - x)$ . ¿Por qué? Discute con un compañero los argumentos en que basas cada una de tus respuestas.
- La expresión que resuelve el problema es  $x(100 - x) = 2100$ . Escribe esta ecuación en su forma general  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Resuelvan la ecuación anterior usando la factorización. ¿Cuáles son las soluciones?
- La ecuación también puede resolverse al sustituir sus coeficientes en la fórmula general. ¿En cuál de las siguientes expresiones la sustitución se realizó de manera correcta?:

$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 8400}}{2}$ 
  $x = \frac{100 \pm \sqrt{2100 - 100}}{2}$ 
  $x = \frac{100 \pm \sqrt{1000 - 840}}{2}$

e) Según la fórmula general, ¿cuáles son las soluciones de la ecuación? Comparen estas soluciones con las encontradas mediante la factorización. ¿Son iguales o son diferentes? En caso de que no coincidan, revisen tu trabajo.

5. El cuadrado de un número negativo menos cinco veces el mismo número, es igual a 50. ¿Cuál es el número?



Coordinados por su profesor, expongan sus respuestas a los problemas anteriores; discutan además cuándo conviene aplicar la fórmula general, y cuándo la factorización o el simple cálculo mental para resolver ecuaciones cuadráticas. Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

## 14.2. Discriminante y número de raíces

### Problema inicial

¿Cuántas soluciones tiene cada una de las siguientes ecuaciones? \_\_\_\_\_

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 9x - 36 = 0$$

¿En qué argumentos basas tu respuesta? \_\_\_\_\_

### Exploración y discusión



a) ¿Cómo puedes saber cuántas y cuáles son las soluciones de estas ecuaciones si usas tablas de valores como las siguientes? Complétalas y discute tu respuesta con un compañero.

$x$							
$x^2 - 6x + 9$							

$x$							
$x^2 - 9x - 36$							

b) ¿Cuántas soluciones tiene la primera ecuación? \_\_\_\_\_ ¿Y la segunda? \_\_\_\_\_  
¿Tiene más soluciones una ecuación que la otra? \_\_\_\_\_

c) Resuelvan las ecuaciones utilizando el procedimiento de factorización. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son las de  $x^2 - 9x - 36 = 0$ ? \_\_\_\_\_

d) Con la fórmula general, resuelvan la ecuación  $x^2 - 6x + 9 = 0$ . Al realizar la sustitución de los coeficientes en la fórmula, ¿a qué número hay que extraer raíz cuadrada? \_\_\_\_\_

e) Ahora resuelvan la ecuación  $x^2 - 9x - 36 = 0$  con la fórmula general. Al sustituir los coeficientes en la fórmula, ¿a qué número hay que extraer raíz cuadrada? \_\_\_\_\_

f) Comparen las soluciones que encontraron mediante los tres procedimientos. ¿Los resultados son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

*Discriminante de una ecuación cuadrática.* Es el subradical  $b^2 - 4ac$  de la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

g) ¿Cuál es el valor del discriminante de la ecuación cuadrática  $x^2 - 6x + 9 = 0$ , y cuál el de  $x^2 - 9x - 36 = 0$ ? \_\_\_\_\_

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación en cada caso? \_\_\_\_\_

h) ¿Qué relación hay entre el valor del discriminante y el número de raíces que tiene la ecuación cuadrática?



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- Si aplican la fórmula general para resolver una ecuación de la forma  $x^2 - c^2 = 0$ , ¿cuál es el valor del discriminante? ¿Cuáles son las soluciones de esa ecuación?
- Al aplicar la fórmula general en la resolución de una ecuación de la forma  $x^2 + bx = 0$ , ¿cuánto vale el discriminante? ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

1. Calcula el valor del discriminante de las siguientes ecuaciones. Si es positivo o cero, halla las soluciones.

Ecuación	Valor del discriminante	Soluciones
a) $x^2 - 6x + 8 = 0$	( )Positivo ( )Cero ( )Negativo	$x_1 =$ $x_2 =$
b) $x^2 + 2x + 1 = 0$	( )Positivo ( )Cero ( )Negativo	
c) $x^2 + x + 5 = 0$	( )Positivo ( )Cero ( )Negativo	

Hay ecuaciones en las que el valor del discriminante es negativo. Por ejemplo, en la ecuación  $5x^2 - 3x + 6 = 0$ , el valor del discriminante es  $-111$ . En este caso, la ecuación no tiene solución real, porque no hay un número que multiplicado por sí mismo dé un número negativo.

2. ¿Por qué las siguientes ecuaciones no tienen soluciones reales?

- a)  $x^2 + x + 1 = 0$ , porque \_\_\_\_\_
- b)  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , porque \_\_\_\_\_
- c)  $x^2 - x + 2 = 0$ , porque \_\_\_\_\_

3. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Discute con un compañero tus respuestas y los procedimientos que usaste para encontrarlas.

- a) ¿Qué valor debe tener  $c$ , para que la ecuación  $x^2 - 8x + c = 0$  tenga una raíz doble (esto es, una sola solución)?
- b) Calcula el valor de  $b$  en la ecuación  $x^2 + bx + 36 = 0$ , sabiendo que es un número negativo y que la ecuación tiene una sola raíz.
- c) En una ecuación de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ , ¿qué tipo de trinomio debe ser el primer miembro para que la ecuación tenga una sola raíz?
- d) Si, en una ecuación cuadrática, el primer miembro es una diferencia de cuadrados ( $x^2 - a^2 = 0$ ), ¿cómo son sus raíces?



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos realizados por los equipos para resolver las actividades anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿En qué casos la propiedad del cero determina que una ecuación cuadrática tenga dos soluciones?
- ¿En qué casos el doble signo ( $\pm$ ) del discriminante determina que una ecuación cuadrática tenga dos soluciones?
- ¿En qué casos el valor del discriminante determina que una ecuación cuadrática tenga solamente una solución?
- ¿En qué casos el valor del discriminante determina que una ecuación cuadrática no tenga solución? Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**14.3. Actividades sobre resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas**

Al terminar de resolver cada uno de los siguientes problemas, compara tus estrategias y resultados con los de un compañero. Revisa tus procedimientos y, si es necesario, corrige.

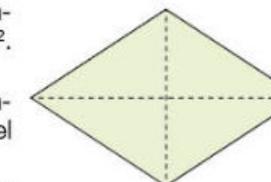
- El área de un terreno cuadrado es de  $169 \text{ m}^2$ .
  - a) ¿Puedes resolver el problema sin plantear una ecuación cuadrática? Intentalo.
  - b) Ahora escribe la ecuación cuadrática que lo resuelve.
  - c) ¿Cuánto mide por lado el terreno?
  - d) ¿Cuánto mide su perímetro?
- El área de un cuadrado es de  $200 \text{ m}^2$ . Si sabemos que un cuadrado es un rombo cuyas diagonales tienen igual longitud, ¿cuánto miden las diagonales de este cuadrado?
  - a) ¿Puedes resolver el problema sin plantear una ecuación cuadrática? Intentalo.
  - b) Ahora escribe la ecuación cuadrática que la resuelve.
  - c) ¿Cuánto miden las diagonales de este cuadrado?

3. El área de un terreno rectangular es de  $300 \text{ m}^2$ . Halla las dimensiones del terreno de modo que su perímetro sea de  $74 \text{ m}$ .



- a) Si asignas la variable  $x$  a la medida del ancho, ¿cómo representas la medida del largo? ¿Cómo representas el área del terreno?
- b) ¿Qué ecuación cuadrática resuelve el problema? ¿Qué método conviene utilizar para resolverla? ¿Por qué?

4. Calcula las longitudes de las diagonales de un terreno en forma de rombo, sabiendo que difieren en  $6 \text{ m}$  y que el área del terreno es de  $108 \text{ m}^2$ .



- a) Si a una de las diagonales le asignas la variable  $x$ , ¿cómo representas la medida de la otra diagonal? ¿Cómo representas el área del terreno?
- b) ¿Qué ecuación cuadrática resuelve el problema? ¿Qué método conviene utilizar para resolverla?



• Observa los videos "Resolución de ecuaciones cuadráticas expresadas en su forma general" y "Resolución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general" para conocer cómo se resuelven las ecuaciones cuadráticas:

- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/2/1762>
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/3/1773>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

- Resuelve la ecuación  $5(x + 2)(x - 3) = 0$  sin convertirla a la forma general. Halla las soluciones directamente y comprueba luego los resultados utilizando la fórmula general.
- Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas sin utilizar la fórmula general.

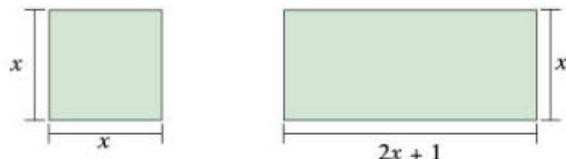
a) $(x - 2)(x + 5) = 0$	d) $(2x - 3)(3x + 1) = 0$
b) $2(x + 3)(x - 1) = 0$	e) $(x - 5)^2 = 144$
c) $(x + 2)(3 - x) = 0$	f) $(x + 2)^2 = 100$



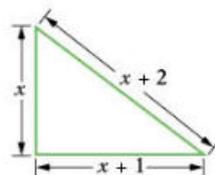
- Usa una calculadora de bolsillo para resolver las siguientes ecuaciones:

- $5x^2 - 7x - 12 = 0$
- $3x^2 + 11x - 4 = 0$
- $15x^2 + 19.5x + 4.5 = 0$

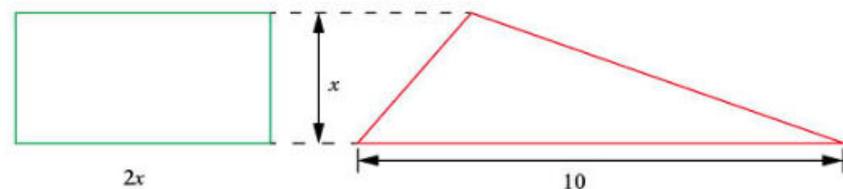
- La diferencia entre las áreas de las siguientes figuras es  $90 \text{ cm}^2$ . ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



- ¿Qué valor debe tener  $x$  para que la figura siguiente sea un triángulo rectángulo?



- ¿Qué valor debe tener  $x$  para que el rectángulo y el triángulo tengan la misma área?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos que realizaron para resolver las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos

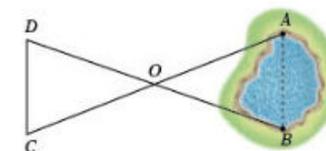
¿Cómo puedes demostrar que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y que sus ángulos contiguos son suplementarios?

**Te recomendamos la lectura**  
 "Triángulos semejantes. Medición de alturas", en Hernández Garcíadiego, C., *La geometría en el deporte, México, Santillana, 2002.*

### 15.1. Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

#### Problema inicial

En la figura, el segmento  $AB$  representa la longitud de una laguna, de un montón grande de objetos o de cualquier otra cosa, de manera que no se puede medir directamente.



¿Cómo determinar la longitud de  $AB$  de una manera sencilla? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



- Escribe en el siguiente recuadro tu propuesta de solución. ¿En qué propiedad geométrica se basa tu propuesta? Discútelas con un compañero.

- Supongan que, para distinguir en el terreno los puntos  $A, B, C, D$  y  $O$ , en cada uno de ellos se clava una estaca. ¿Qué condiciones debe cumplir la ubicación de estos puntos para que determinen dos triángulos congruentes? \_\_\_\_\_

- ¿Qué criterio de congruencia de triángulos se aplica en este caso para resolver el problema? \_\_\_\_\_

- Si la longitud del objeto no se puede medir directamente, ¿de qué otra manera se determina? \_\_\_\_\_

- Si les encargaran la realización de esta tarea, ¿qué materiales requerirían? \_\_\_\_\_

- Ya ubicados a la orilla de la laguna, ¿qué obstáculos podrían encontrar? ¿Cómo los superarían? \_\_\_\_\_

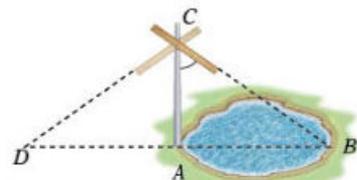


Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas:

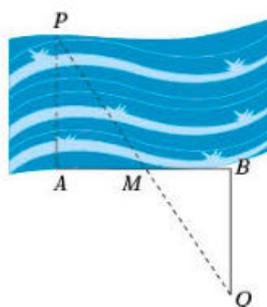
1. Otra forma de resolver el problema anterior se muestra en la figura:



AC representa una barra vertical a la cual, mediante un tornillo, se le ajusta un tubo inclinado, de manera que, al mirar a través de él, la visual apunte al punto inaccesible B. Después, manteniéndola vertical, se gira la barra y, sin cambiar el ángulo que forma con el tubo, se dirige otra visual para ubicar el punto D, en que dicha visual toca el suelo.

- Con el procedimiento anterior se determinan dos triángulos congruentes:  $ACB$  y  $ACD$ . ¿Qué criterio de congruencia se aplica en este caso?
- ¿En cuál de los lados del triángulo  $ACD$  se halla indirectamente la longitud de la laguna?

2. Una manera de medir indirectamente la anchura de un río se muestra en la siguiente figura.



Desde el punto A, que se halla directamente opuesto a P, se camina en ángulo recto en dirección a B y se cuentan los pasos. En el punto medio M de AB se clava una estaca. Ahora se camina desde B en dirección perpendicular a AB, contando los pasos, hasta el punto en que se vean alineados los puntos M y P.

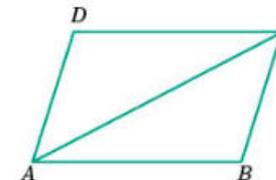
- ¿Son congruentes los triángulos  $AMP$  y  $BMQ$ ? ¿Qué criterio de congruencia se aplica?
- ¿Cuál de los lados del triángulo  $BMQ$  representa la anchura del río?

PROYECTO DEL BLOQUE

Medir distancias y alturas inaccesibles

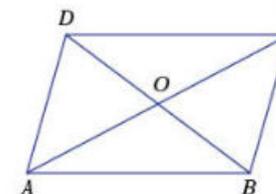
Investiguen en qué épocas y lugares vivieron Tales, Eratóstenes, Euclides, Pitágoras, Arquímedes y Diofanto, y cuál o cuáles son las principales aportaciones que realizó cada uno. Escriban las biografías de estos matemáticos para formar una monografía.

3. Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos. En la figura,  $AB$  y  $CD$  son paralelos, lo mismo que  $AD$  y  $BC$ . El segmento  $AC$  es una diagonal.



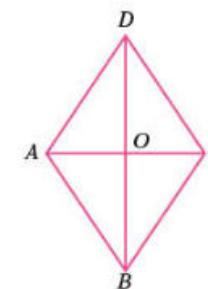
- ¿Son congruentes los triángulos  $ABC$  y  $ACD$ ?
- ¿Qué criterio de congruencia permite asegurarlo?
- ¿Por qué los lados opuestos de un paralelogramo son iguales?

4.  $ABCD$  es un paralelogramo cuyas diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan en  $O$ .



- ¿Son congruentes los triángulos  $AOB$  y  $COD$ ? ¿Qué criterio de congruencia permite asegurarlo?
- ¿Son  $AO = CO$  y  $BO = DO$ ? ¿Qué argumento permite asegurarlo?
- ¿Las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente por mitad?

5. Las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí. ¿Qué criterio de congruencia de triángulos se puede utilizar para demostrar este hecho?



Coordinados por su profesor, expongan con argumentos en el grupo sus respuestas a los problemas anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

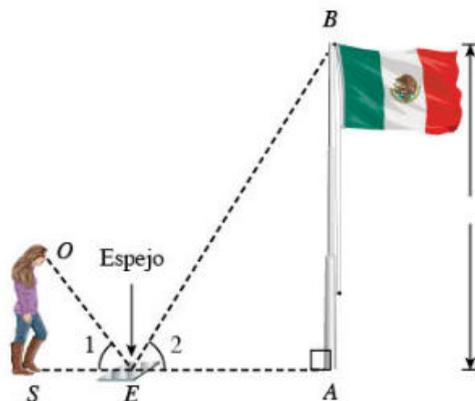
- ¿Qué propiedades de los romboides y rectángulos pueden probarse aplicando los criterios de congruencia de triángulos?
- ¿Qué propiedades de los rombos y cuadrados pueden probarse aplicando esos criterios?

### 15.2. Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos

#### Problema inicial

Sonia va a estimar la altura de la astabandera de su escuela de la siguiente manera: coloca un espejo en el piso y se retira de él hasta el punto en que pueda ver, reflejada en el espejo, la parte más alta de la astabandera, como se muestra en la figura.

La estatura de Sonia es de 1.69 m, pero sus ojos están 9 cm abajo de la parte superior de su cabeza. La distancia entre ella y el espejo ( $SE$ ) es de 1.20 m, y del pie de la astabandera al espejo ( $EA$ ) es de 4.5 m. Por la física sabemos que  $\angle 1 = \angle 2$ . (Consulta el tema "Formación de imágenes en espejos planos" en un libro de física.) ¿Qué altura tiene la astabandera?



#### Exploración y discusión

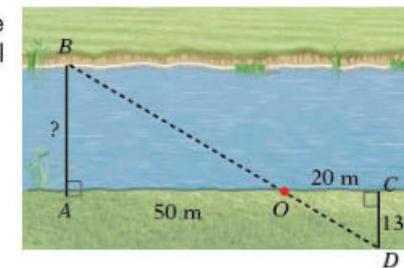
- ¿Por qué los triángulos  $SEO$  y  $AEB$  son semejantes? \_\_\_\_\_  
¿Qué criterio de semejanza lo justifica? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los tres pares de lados homólogos de los triángulos  $SEO$  y  $AEB$ ? ¿Cuáles de ellos son de interés para resolver el problema? \_\_\_\_\_
- Escribe una expresión de proporcionalidad para hallar una aproximación a la altura de la astabandera. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la altura de la astabandera? Discute tu respuesta con la obtenida por un compañero. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos que se forman en esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo encuentran la altura de la astabandera a partir de la razón de semejanza? \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones de los equipos.

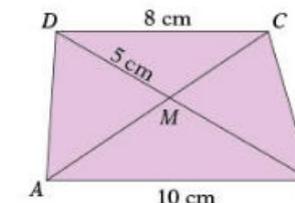
#### Actividades adicionales

- Luis midió, de modo indirecto, la anchura de un río basándose en criterios de semejanza de triángulos. El esquema resume el procedimiento que siguió.



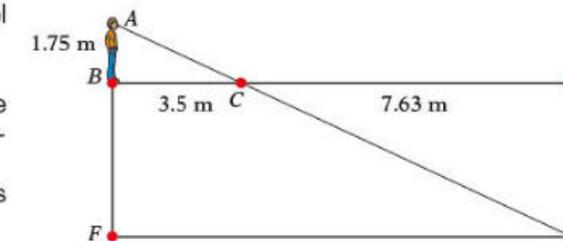
- Explica el procedimiento que utilizó para hacerlo.
- ¿Qué criterio de semejanza aplicó?
- ¿Qué ángulos son homólogos?
- ¿Cuáles son los lados homólogos?
- ¿Cuánto mide el ancho del río?

- En un trapecio  $ABCD$ , cuyas bases miden:  $AB = 10$  cm y  $CD = 8$  cm, las diagonales  $AC$  y  $BC$  se cruzan en un punto  $M$ , de modo que  $DM = 5$  cm.



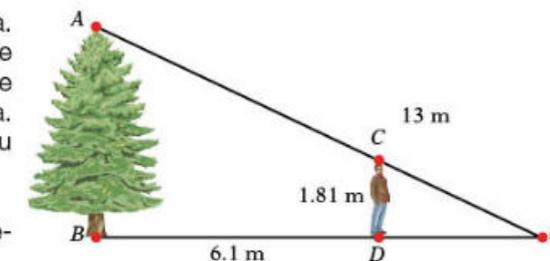
- ¿Qué triángulos semejantes se forman?
- ¿Qué criterio de semejanza aplicaste?
- ¿Cuáles son los lados homólogos de esos triángulos?
- ¿Cuáles son los ángulos homólogos?
- ¿Cuánto mide el segmento  $BM$ ?

- Entre los edificios  $BF$  y  $DE$  hay un puente  $BD$ . Para hallar la altura del puente, Alberto miró, desde el extremo  $B$  del puente, la base  $E$  del otro edificio.



- En la figura, ¿qué criterio de semejanza permite afirmar que los triángulos  $ABC$  y  $EDC$  son semejantes?
- ¿Cuáles son los ángulos homólogos de estos triángulos?
- ¿Cuáles son los lados homólogos?
- ¿Cuál es la altura  $DE$  del puente?

- Alberto mide la altura de un árbol usando su sombra. Él camina a lo largo de la sombra del árbol hasta que su cabeza queda alineada con la recta que va desde la parte superior del árbol a la punta de su sombra. Supón que la estatura de Alberto es 1.75 m, y su distancia a la base del árbol es de 6.1 m.



- ¿Por qué los triángulos  $ABO$  y  $CDO$  son semejantes?
- ¿Qué otra distancia necesita conocer Alberto para determinar la altura del árbol?
- Si esa distancia es 3.05 m, ¿qué altura tiene el árbol?



Con la ayuda de su profesor, presenten con argumentos en el grupo sus respuestas a los cuatro problemas anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Qué altura inaccesible de su escuela o de su entorno pueden medir indirectamente, aplicando la semejanza de triángulos?
- ¿Cómo pueden hacerlo? Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás y transportador.

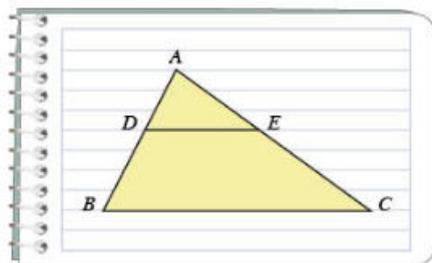
## Teorema de Tales

¿Cómo calcular la altura de un árbol valiéndose de una vara pequeña y midiendo las sombras que proyectan el árbol y la varita a una misma hora del día?

### 16.1. ¿Qué es el teorema de Tales?

#### Problema inicial

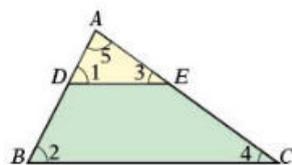
Luis trazó en su cuaderno de rayas dos triángulos como los que se muestran en la figura:



Los triángulos ADE y ABC se parecen. ¿Son semejantes? Justifica tu respuesta.

#### Exploración y discusión

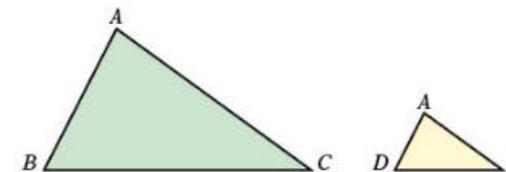
- a) Los segmentos DE y BC son paralelos. ¿Qué relación hay entre los ángulos 1 y 2? \_\_\_\_\_ ¿Y entre los ángulos 3 y 4? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_



- b) ¿Son semejantes los triángulos ADE y ABC? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
c) Si los triángulos ADE y ABC son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

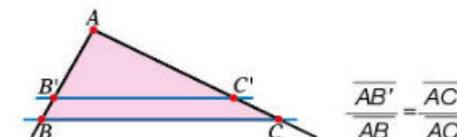
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Mide los lados de estos triángulos. ¿Cuál es el valor numérico de la razón entre sus lados homólogos? \_\_\_\_\_



El teorema de Tales afirma: "Si los lados de un triángulo son cortados por dos rectas paralelas, la razón de los segmentos situados en uno de los lados es igual a la razón de sus correspondientes en el otro lado."

Esta igualdad se expresa de la siguiente manera:



- d) ¿Cómo sería el trazo de Luis, si la razón entre los lados homólogos de los triángulos fuera  $\frac{1}{2}$ ? ¿Y si la razón fuera  $\frac{4}{5}$ ? Traza los triángulos en el siguiente recuadro y compara tu trabajo con el de un compañero. Corrijan, si es necesario.

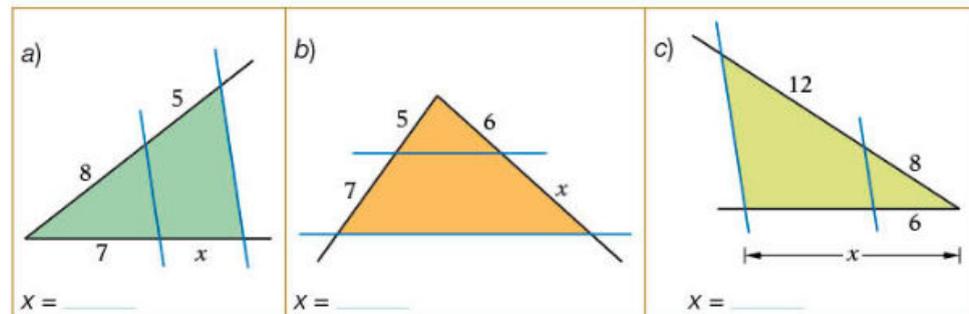


- e) ¿Qué significa dividir un segmento en una razón de  $\frac{4}{5}$ ? \_\_\_\_\_  
¿En cuántas partes iguales se requiere dividir el segmento para hacerlo? \_\_\_\_\_  
¿De cuántas partes iguales consta cada una de las dos partes en que se divide el segmento? \_\_\_\_\_  
f) ¿Qué significa dividir un segmento en la razón  $\frac{1}{2}$ ? \_\_\_\_\_

Con la ayuda de su profesor, expongan en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

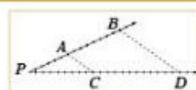
Actividades adicionales

1. Aplica el teorema de Tales para hallar las longitudes de los segmentos señalados con la letra  $x$ . (Las parejas de rectas de color azul son paralelas.)



2. Reúnete con un compañero para realizar, con regla, compás y transportador, la siguiente actividad.

- Tracen un ángulo agudo  $P$ .
- A partir de  $P$ , en una de las semirrectas, marquen dos puntos ( $A$  y  $B$ ), de modo que  $\overline{PA}$  mida 6 cm, y  $\overline{BA}$ , 8 cm. Anoten junto a cada segmento la medida de su longitud.
- En la otra semirrecta, marquen otros dos puntos ( $C$  y  $D$ ), de modo que  $\overline{PC}$  mida 9 cm, y  $\overline{CD}$ , 12 cm. Anoten junto a cada segmento la medida de su longitud. La figura que obtengan debe ser semejante a la que se muestra.

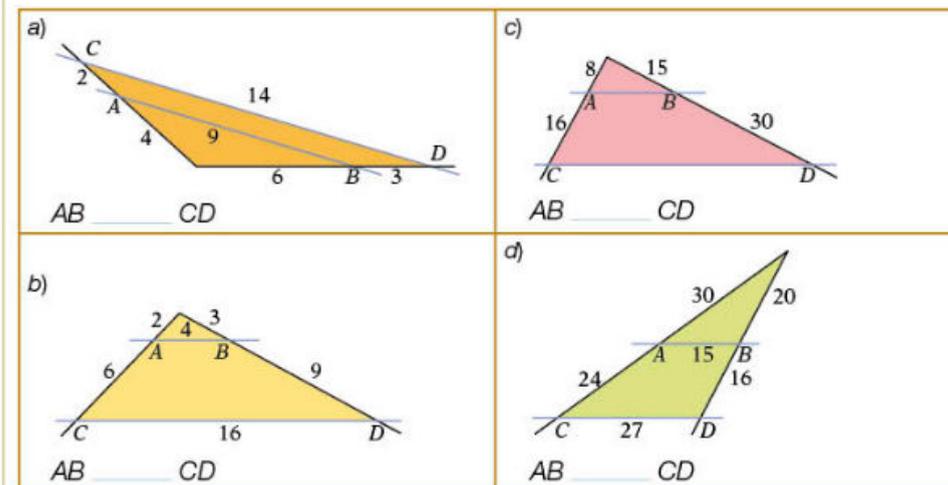


d) ¿Cuál es la razón entre las longitudes de  $\overline{PA}$  y  $\overline{AB}$ ? ¿Y entre las longitudes de  $\overline{PC}$  y  $\overline{CD}$ ? ¿Qué relación hay entre estas dos razones?

e) Con el transportador, midan  $\angle PAC$  y  $\angle PBD$ . ¿Son iguales o diferentes estos ángulos? Comparen sus resultados con los obtenidos por otros equipos del grupo.

Los resultados que obtuvieron en esta actividad se confirman con el siguiente teorema, llamado *recíproco del teorema de Tales*: "Si los lados de un triángulo son cortados por dos rectas, de modo que la razón de los segmentos situados en uno de los lados es igual a la razón de los correspondientes en el otro, las rectas son paralelas".

3. Apliquen el recíproco del teorema de Tales para determinar si el segmento que une los puntos  $A$  y  $B$  es paralelo al segmento que une los puntos  $C$  y  $D$ . (Utiliza el símbolo  $//$  para determinar que  $\overline{AB}$  es paralelo a  $\overline{CD}$ .)



4. Para hallar el punto  $M$  de un segmento  $AB$ , tal que  $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ , se procede de la siguiente manera:

<p>1 Se traza la semirrecta <math>Ax</math>.</p>	<p>2 Se marcan sobre <math>Ax</math> tres puntos <math>C, D</math> y <math>E</math> (en ese orden), tales que: <math>AC = CD = DE</math>.</p>	<p>3 Se traza la paralela a <math>BE</math> que pase por <math>D</math>: ésta corta a <math>AB</math> en <math>M</math>.</p>
--	---	--

¿Es ésta una aplicación del teorema de Tales o de su recíproco? Justifica tu respuesta



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo las respuestas de los equipos a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Medir distancias y alturas inaccesibles

Cierre del proyecto. Conformen un catálogo de 5 a 10 problemas representativos de los matemáticos Tales, Eratóstenes, Pitágoras y Euclides. Pueden presentarlos a manera de monografía.

16.2. Actividades sobre el teorema de Tales y su recíproco



Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades.

- La siguiente secuencia de figuras ilustra un procedimiento para dividir un segmento en tres partes congruentes. Observen en la cuarta figura que los segmentos  $O'D$  y  $OC$  son paralelos al segmento  $O''B$ .

1	2	3
<hr/> <hr/> <hr/>	<hr/> <hr/> <hr/>	<hr/> <hr/> <hr/>
4		
<hr/> <hr/> <hr/>		

- Escriban en las líneas los pasos que se siguieron para dividir el segmento  $AB$  en tres partes congruentes.
- Utilicen este procedimiento para dividir un segmento  $AB$  en cinco, en seis y en siete partes congruentes. Trabajen en su cuaderno.
- ¿Qué argumentos geométricos darían a otro equipo para convencerlo de que, efectivamente, el segmento  $AB$  queda dividido en tres (o cinco, seis o siete) partes congruentes? Escríbelos en el recuadro.

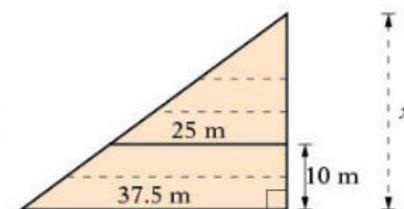
Usemos las TIC

• Observa los videos "Tales de Mileto" y "Utilizando el teorema de Tales", para saber quién fue el matemático Tales de Mileto y conocer el uso de su teorema:

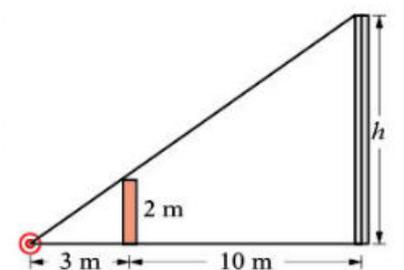
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/13/30/3/1775>
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/13/30/3/1776>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

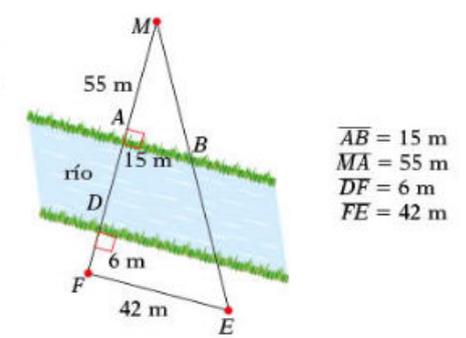
- Lucero y Manuel trabajan en un edificio como el que se representa en la figura. Ella trabaja en la planta baja, cuya longitud es de 37.5 m. El piso donde está Manuel es de 10 m arriba del piso donde trabaja Lucero. La longitud del piso de Manuel es de 25 m. ¿Cuál es la altura del edificio?



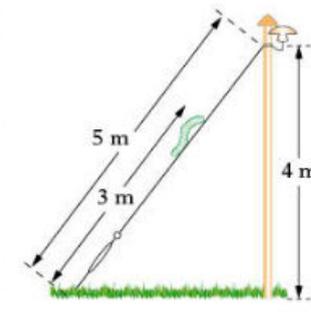
- En una práctica de tiro se coloca una barrera de 2 m de alto a 3 m de un blanco. Para disparar, el tirador debe subirse a un poste que está a 10 m del pie de la barrera. ¿Desde qué altura mínima ( $h$ ) debe disparar para poder dar en el blanco?



- Una manera de calcular la anchura de un río aplicando el teorema de Tales: por una parte, se colocan tres estacas alineadas  $A, D$  y  $F$ , de manera que el segmento  $AF$  sea perpendicular a los bordes del río; después, las estacas  $B$  y  $E$ , de manera que  $EF$  sea paralela a los bordes del río. ¿Cuánto mide el ancho  $AD$  del río?



- Un poste telefónico de 4 m de altura está sostenido por un cable metálico de 5 m de longitud. Un gusano que partió del extremo inferior del cable ha recorrido ya una distancia de 3 m.



- ¿A qué distancia de la base del poste se encontraba cuando inició su ascenso?
- ¿Cuánto le falta por recorrer para llegar al extremo superior del poste?
- ¿Qué distancia es mayor: la que le falta por recorrer o la que lo separa del poste sobre la horizontal?
- ¿Cuál es la diferencia entre esas longitudes?



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo las respuestas de los equipos a las actividades anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Qué altura inaccesible de su escuela o de su entorno pueden medir indirectamente, aplicando el teorema de Tales o su recíproco?
- ¿Cómo pueden hacerlo?

Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás y papel transparente.

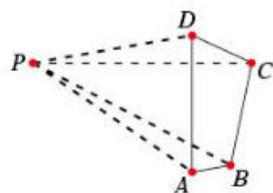
## Homotecia

Si has trazado un triángulo en una hoja de papel, ¿cómo trazarías otro triángulo con lados paralelos a los lados del original, y de modo que las longitudes de dichos lados midan el doble que las longitudes de los lados del original?

### 17.1. Figuras semejantes en cascada: homotecias

#### Problema inicial

En la siguiente figura, el punto  $P$  representa la fuente de luz de un proyector, y el cuadrilátero  $ABCD$ , la transparencia de una fotografía que se va a proyectar en una pantalla.



- Prolonga las rectas  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  y  $PD$ . (Las rectas son como los rayos de luz de la lámpara del proyector.)
- Con tu compás, mide las distancias  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PC}$  y  $\overline{PD}$ , y marca sobre las rectas los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$ , de modo que:

$$\overline{PA'} = 2(\overline{PA}), \overline{PB'} = 2(\overline{PB}), \overline{PC'} = 2(\overline{PC}) \text{ y } \overline{PD'} = 2(\overline{PD})$$

y forma el cuadrilátero  $A'B'C'D'$ .

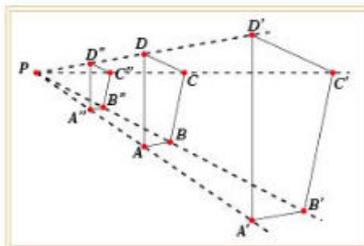
- Ahora localiza sobre las rectas los puntos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  y  $D''$ , de modo que:

$$\overline{PA''} = \frac{1}{2}(\overline{PA}), \overline{PB''} = \frac{1}{2}(\overline{PB}), \overline{PC''} = \frac{1}{2}(\overline{PC}) \text{ y } \overline{PD''} = \frac{1}{2}(\overline{PD})$$

y forma el cuadrilátero  $A''B''C''D''$ . (La figura resultante debe ser semejante a la figura de la derecha.)

¿Qué relación hay entre los cuadriláteros  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  y  $A''B''C''D''$ ? \_\_\_\_\_

Toma en cuenta que todos los puntos están en el plano del papel y no en el espacio, como la imagen parece hacernos creer.



#### Exploración y discusión

- a) Escribe en el recuadro todas las relaciones que encuentres entre los cuadriláteros  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  y  $A''B''C''D''$ .

- b) Mide los lados de los cuadriláteros  $A'B'C'D'$  y  $ABCD$ , y halla el valor de las razones de sus lados homólogos.

$$\frac{A'B'}{AB} = \quad \quad \quad \frac{C'D'}{CD} =$$

$$\frac{B'C'}{BC} = \quad \quad \quad \frac{A'D'}{AD} =$$

- c) ¿Los lados homólogos de los cuadriláteros son proporcionales?; es decir:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} ? \quad \text{_____}$$

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- d) Copia en papel transparente el cuadrilátero original. Compara los ángulos homólogos de los cuadriláteros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ . ¿Por qué son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_

- e) ¿Por qué son semejantes los cuadriláteros  $A'B'C'D'$  y  $ABCD$ ? \_\_\_\_\_

- f) Mide los lados del cuadrilátero  $A''B''C''D''$  y halla el valor de las razones.

$$\frac{A''B''}{AB} = \quad \quad \quad \frac{C''D''}{CD} =$$

$$\frac{B''C''}{BC} = \quad \quad \quad \frac{A''D''}{AD} =$$

- g) ¿Los lados homólogos de los cuadriláteros  $A''B''C''D''$  y  $ABCD$  son proporcionales?; es decir:

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''D''}{CD} = \frac{A''D''}{AD} ? \quad \text{_____}$$

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- h) Compara los ángulos homólogos de los cuadriláteros  $A''B''C''D''$  y  $ABCD$ . ¿Por qué son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_

- i) ¿Por qué son semejantes los cuadriláteros  $A''B''C''D''$  y  $ABCD$ ? \_\_\_\_\_

j) Lee la información que se presenta en el recuadro para contestar las siguientes preguntas.

Las **figuras homotéticas** son dos figuras semejantes, cuyos lados homólogos son paralelos. Las rectas que unen los vértices correspondientes se cruzan en un punto  $P$ , llamado **centro de homotecia**.  
**Razón de homotecia** es la razón de los lados homólogos de dos figuras homotéticas.  
 En general, si  $\overline{OP'} = k\overline{OP}$  (donde  $k$  es un factor de ampliación o reducción), se dice que  $P'$  es el punto homotético de  $P$  con centro  $O$  y razón de homotecia  $k$ .

¿Son homotéticas estas figuras? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es la razón de homotecia (o el valor de  $k$ ) del cuadrilátero  $A'B'C'D'$  con respecto del cuadrilátero  $ABCD$ ? \_\_\_\_\_

¿Y del cuadrilátero  $A''B''C''D''$  con respecto del cuadrilátero  $ABCD$ ? \_\_\_\_\_

k) ¿En cuál de las figuras homotéticas trazadas se trata de una reducción? ¿En cuál, de una ampliación? \_\_\_\_\_

Discute con un compañero tu respuesta.

l) Cuando se trata de una reducción, ¿cómo es la razón de homotecia con respecto de la unidad? \_\_\_\_\_ ¿Y cuando se trata de una ampliación? \_\_\_\_\_

m) Si la figura homotética es exactamente igual a la original, ¿cuál es la razón de homotecia? \_\_\_\_\_



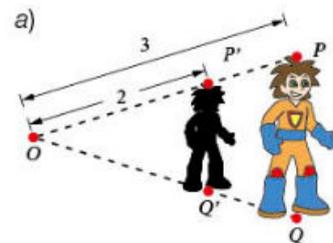
Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

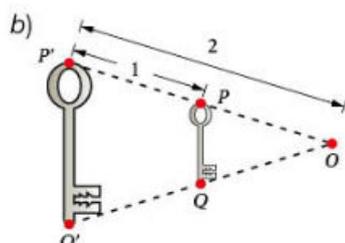


Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. En cada caso, el punto  $O$  es el centro de homotecia, y la figura  $P'Q'$  es la homotética. ¿Cuál es la razón de homotecia? ¿Se trata de una ampliación o de una reducción? Marquen con una (✓) su respuesta.

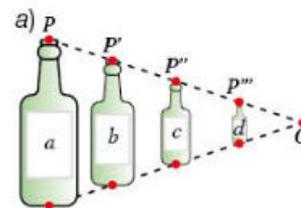


Razón de homotecia ( $k$ )= \_\_\_\_\_  
 Ampliación     Reducción

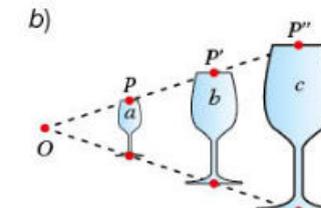


Razón de homotecia ( $k$ )= \_\_\_\_\_  
 Ampliación     Reducción

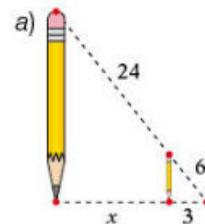
2. En cada caso, la figura  $a$  es la original. ¿Cuál es la razón de homotecia de las demás figuras?



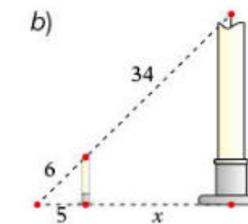
Razón de homotecia entre la figura  $a$  y... Razón de homotecia entre la figura  $a$  y...  
 ... la figura  $b$  = \_\_\_\_\_    ... la figura  $b$  = \_\_\_\_\_  
 ... la figura  $c$  = \_\_\_\_\_    ... la figura  $c$  = \_\_\_\_\_  
 ... la figura  $d$  = \_\_\_\_\_



3. Se ha hecho una reducción de la imagen del lápiz y una ampliación de la vela. ¿Cuál es el valor de  $x$  en cada caso? ¿Cuál es la razón de homotecia?



$x$  = \_\_\_\_\_  
 Razón de homotecia ( $k$ )= \_\_\_\_\_



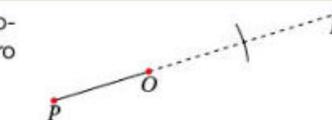
$x$  = \_\_\_\_\_  
 Razón de homotecia ( $k$ )= \_\_\_\_\_

4. Tracen en su cuaderno un triángulo  $ABC$  y enseguida tracen su homotético con centro  $O$  y  $k = -3$ .

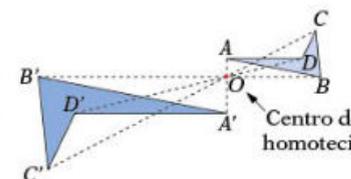


Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas a los problemas anteriores. Consideren la información que se presenta en el siguiente recuadro y escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Si el valor de  $k$  es menor que cero (digamos,  $-2$ ), tomamos el punto  $P'$  situado a una distancia  $2 \times \overline{OP}$ , pero del lado de la recta donde no está  $P$ .



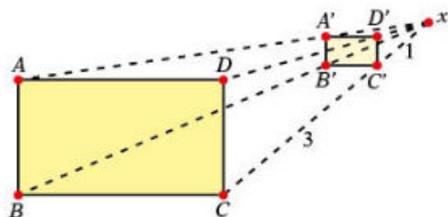
Por ejemplo, en la figura se muestra el cuadrilátero  $A'B'C'D'$ , que es homotético del cuadrilátero  $ABCD$  en la homotecia de centro  $O$  y razón de homotecia  $k = -2$ .



17.2. Actividades sobre homotecia

1. En el cuadrilátero  $A'B'C'D'$ , los lados  $A'B'$  y  $B'C'$  miden 4 y 7 cm, respectivamente.

a) Halla el perímetro de  $ABCD$ .



b) Halla el área de  $ABCD$ . Calcula los siguientes cocientes:

$$\frac{A'B'}{AB} = \quad \frac{C'D'}{CD} = \quad \frac{B'C'}{BC} = \quad \frac{A'D'}{AD} =$$

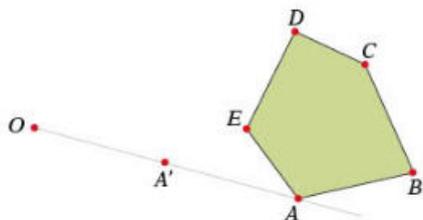
- c) ¿Qué relación hay entre los ángulos  $A'B'C'$  y  $ABC$ ?
- d) ¿El cuadrilátero  $A'B'C'D'$  está a escala con respecto del cuadrilátero  $ABCD$ ? Si es así, ¿cuál es la escala?



2. (Actividad opcional). ¿Cómo se usa GeoGebra para trazar un pentágono homotético a uno dado, con razón de homotecia  $\frac{1}{2}$ ?

Construcción de un pentágono homotético

- a) Da un clic en el icono POLIGONO para trazar un pentágono  $ABCDE$ .
- b) Da un clic en el icono NUEVO PUNTO para trazar un punto  $O$  en el exterior del pentágono.
- c) Da un clic en el icono SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS para trazar un segmento  $OA$ , del punto exterior  $O$  al vértice  $A$ .
- d) Da un clic en la flecha del icono PUNTO MEDIO o CENTRO. Da un clic en el segmento  $OA$  para marcar su punto medio.



Simbólicamente:  $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$ . Ésta será la razón de homotecia.

Usemos las mc



• Observa los videos "Especialmente semejantes" y "Problemas de homotecia" para estudiar las condiciones en que dos figuras son homotéticas:

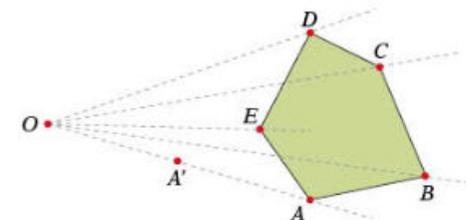
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/13/30/3/1777>
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/13/30/3/1778>

• Utiliza los recursos que se proponen para practicar la homotecia:

- <https://es.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry/transformations/dilations-scaling/a/performing-dilations>
- <https://es.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry/transformations/dilations-scaling/a/defining-dilations-2>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

e) Da un clic en el triángulo del icono SEMIRRECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS y elige SEMIRRECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS. Da clic en el punto  $O$  y en el vértice  $B$  para trazar la semirrecta  $OB$ ; procede de la misma manera con los otros tres vértices del pentágono.

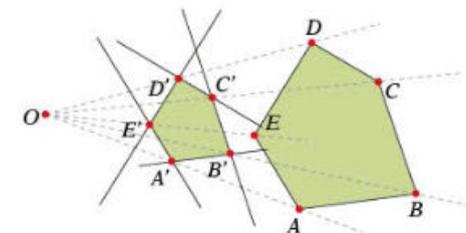


f) Da un clic en el triángulo del icono RECTA PERPENDICULAR y elige RECTA PARALELA. Da clic en el lado  $AB$  del pentágono, para trazar la paralela a ese lado, que pase por  $A'$ . El punto en que corta a la semirrecta  $OB$  determinará el vértice  $B'$ .

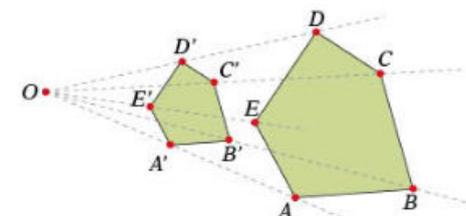
g) Procede de la misma manera para trazar la recta paralela al lado  $BC$ , que pase por el punto  $B'$ ; así se obtiene el vértice  $C'$  en el punto en que la recta corta a la semirrecta  $OC$ .

h) Se repiten los mismos pasos para obtener los vértices  $D'$  y  $E'$ .

i) Da un clic en el icono para trazar el polígono  $A'B'C'D'E'$ .



j) Para observar con claridad la figura, da un clic en el icono DESPLAZA VISTA GRÁFICA y elige EXPONE / OCULTA OBJETO. Da clic en cada una de las rectas paralelas para seleccionarlas y luego en el icono de cualquier otra herramienta para ocultarlas.



Si dispones de este recurso tecnológico, traza un pentágono regular homotético a uno dado, con razón de homotecia  $-1$ . Escribe en el siguiente recuadro tu plan de solución de este problema.



Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo el plan de solución que propusieron (o podrían proponer, en caso de no contar con el recurso) para realizar la actividad 2.

## Gráficas de funciones cuadráticas

Hemos visto que las funciones de la forma  $y = mx + b$  se llaman *lineales* porque su representación gráfica es una recta. Pero, ¿habrá funciones cuya representación gráfica sea diferente? ¿Cómo se construirían y cómo se interpretarían? ¿Qué tipos de situaciones podrían modelarse con ellas?

Te recomendamos la lectura

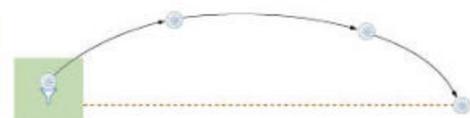
"Funciones y polinomios", en Bosch, C. et al., *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana, 2002c.

### 18.1. Interpretación de gráficas de funciones cuadráticas

#### Problema inicial

Un golfista efectúa un tiro en un terreno horizontal. En la tabla se registran algunas alturas que alcanzó la pelota en su recorrido y el tiempo que tardó en hacerlo.

Tiempo $x$ (en segundos)	0	1	2	3	4	5
Altura $y$ (en metros)	0	20	30			



¿Qué función modela esta situación? \_\_\_\_\_  
 ¿Qué forma tiene la gráfica que le corresponde? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



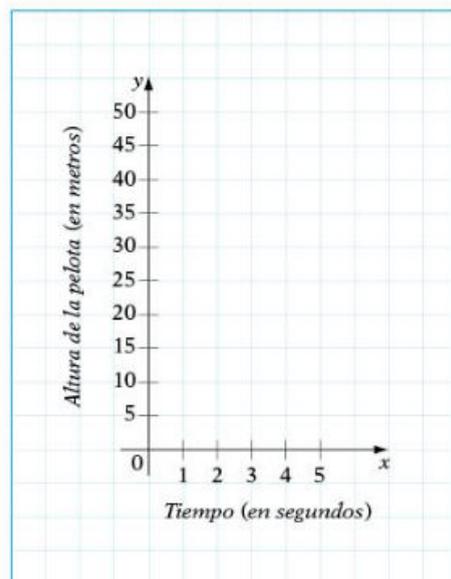
a) Junto con un compañero, traza la gráfica que corresponde a los datos de la tabla.

b) ¿Están alineados los puntos de esta gráfica? \_\_\_\_\_  
 ¿La tabla de valores corresponde a una función lineal o a una cuadrática? \_\_\_\_\_

c) Si la función es cuadrática, la expresión algebraica que le corresponde puede obtenerse calculando los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la forma general  $y = ax^2 + bx + c$  sustituyendo los tres pares de valores de la tabla en esa forma general. Así:

- Para  $x = 0, y = 0$ , se obtiene:  
 $0 = a(0^2) + b(0) + c$ ; de donde  $c = 0$ .
- Para  $x = 1, y = 20$ , se obtiene:  
 $20 = a(1^2) + b(1)$ , o bien:  $a + b = 20$ .
- Y para  $x = 2, y = 30$ , se obtiene:  
 $30 = a(2^2) + b(2)$ , o bien:  $4a + 2b = 30$ .

Las dos últimas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones. Resuélvanlo para hallar los valores de  $a$  y  $b$ . ¿Cuáles son esos valores?  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .



- d) Sustituyan los valores encontrados de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la forma general de la función cuadrática  $y = ax^2 + bx + c$ . ¿Qué expresión algebraica obtuvieron? \_\_\_\_\_  
 Ésta es la función que modela la situación.
- e) Utilicen la función encontrada para completar la tabla del problema inicial. Con los datos de la tabla, completen la gráfica del inciso a).
- f) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en caer al suelo? \_\_\_\_\_

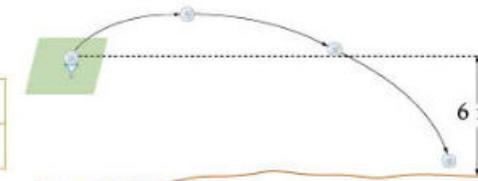


Con la ayuda de su profesor, expliquen y argumenten en el grupo los cálculos y procedimientos realizados por los equipos. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales

1. Si el golfista hubiera efectuado el tiro desde un punto de salida elevado 6 m en relación con el resto del campo, como muestra la figura, algunas alturas que alcanzaría la pelota en su recorrido y el tiempo que tardaría en hacerlo serían los siguientes:

Tiempo $x$ (en segundos)	0	1	2	3	4	5
Altura $y$ (en metros)	6	26	36			



a) ¿Cómo se calcula el valor de  $c$  en la función  $y = ax^2 + bx + c$ ? \_\_\_\_\_

¿Cuál es su valor? \_\_\_\_\_

b) ¿Qué sistema de ecuaciones permite hallar los valores de  $a$  y  $b$  en la función  $y = ax^2 + bx + c$ ? \_\_\_\_\_

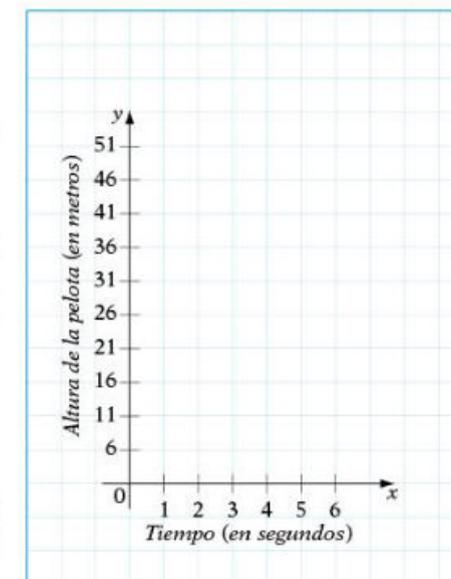


c) ¿Qué función modela esta situación? \_\_\_\_\_  
 Discute tu respuesta con un compañero.

d) ¿Qué diferencia hay entre las funciones que modelan los dos problemas sobre el golfista? \_\_\_\_\_

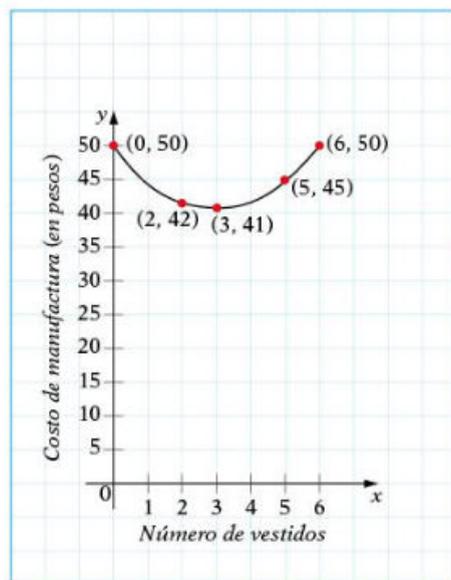
e) ¿Qué forma tiene la gráfica que le corresponde? Trázala en el plano cartesiano.

f) Aproximadamente, ¿cuánto tarda la pelota en caer al suelo? \_\_\_\_\_



Ayudados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a estas preguntas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

2. Supón que el costo en pesos para coser  $x$  vestidos en un día, está dado por la siguiente gráfica:



- a) De acuerdo con la información que proporciona la gráfica, ¿es mayor el costo del material por confeccionar 2 vestidos que por 4? \_\_\_\_\_ Discute tu respuesta con un compañero.
- b) La gráfica indica que el costo de **manufactura** puede reducirse a un mínimo. Si el fabricante hace muy pocos o demasiados vestidos al día, le costará más, quizá por pérdida de ventas en el primer caso o por mano de obra en el segundo. ¿Cuál es el costo mínimo y cuántos vestidos se hacen al día? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la función cuadrática que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué ecuación cuadrática permite calcular el número de vestidos que pueden fabricarse con \$ 45.00? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos vestidos pueden hacerse con \$ 45.00? \_\_\_\_\_

**Glosario**

**Manufactura.** Obra hecha a mano o con auxilio de máquina.

Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo los resultados obtenidos por los equipos. Consideren la información que se presenta en el siguiente recuadro y anoten en sus cuadernos los acuerdos del grupo.

La gráfica de una función cuadrática  $y = ax^2 + bx + c$  es una curva llamada *parábola*. La forma de la parábola depende del signo del coeficiente  $a$  del término  $x^2$ ; si es negativo, sus ramas se abren hacia abajo; si es positivo se abren hacia arriba.

Coficiente  $a$  positivo

Coficiente  $a$  negativo

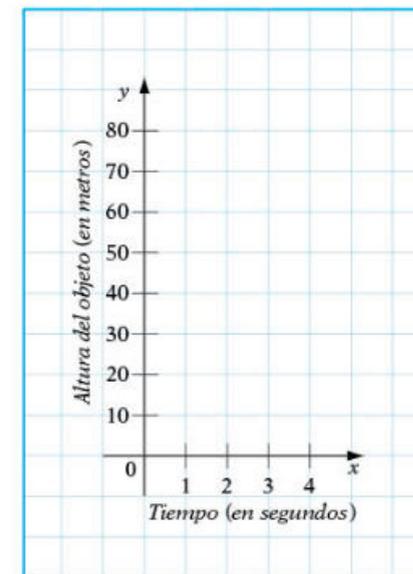


3. Desde la parte más alta de un edificio moderno de 80 m de altura, se deja caer un objeto. En la tabla se registra la altura a la que se encuentra el objeto en los primeros segundos después de que se suelta.

Tiempo $x$ (en segundos)	Altura $y$ (en metros)
0	80
1	75
2	60



- a) Al caer el objeto, la altura que alcanza a cada instante puede determinarse mediante la función  $y = ax^2 + bx + c$ . ¿Qué par de valores de la tabla pueden utilizar para calcular el valor de  $c$  de esta función? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es el valor de  $c$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué sistema de ecuaciones permite hallar los valores de  $a$  y  $b$  en la función  $y = ax^2 + bx + c$ ? \_\_\_\_\_
- c) ¿Qué par de valores de la tabla pueden usar para hallar el valor de  $4a + 2b$  de la función  $y = ax^2 + bx + c$ ? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles son los valores de  $a$  y  $b$ ? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué función cuadrática modela esta situación? \_\_\_\_\_
- e) ¿A qué altura se halla el objeto, 3 segundos después de que fue soltado? \_\_\_\_\_
- f) Si el objeto se dejó caer desde una altura de 80 m, ¿cuántos segundos tarda en caer al piso? \_\_\_\_\_
- g) Tracen la gráfica que representa esta situación.



Con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo los resultados obtenidos por los equipos. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencia hay entre las tablas que representan situaciones de variación lineal y las de variación cuadrática?
- ¿Qué diferencia hay entre las gráficas de situaciones de variación lineal y las de variación cuadrática?
- ¿Hacia dónde abre sus ramas la parábola de la función  $y = -5x^2$ ? ¿Y la de la función  $y = x^2 - 5x$ ?

Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

**Usemos las TIC**

- Observa el video "Elementos de la parábola" para conocer la relación entre los elementos de una ecuación cuadrática y su gráfica:
  - <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/3/1781>

- Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo trazar la gráfica de ecuaciones cuadráticas:

- <https://es.khanacademy.org/math/eb-1-semester-bachillerato/eb-quadratic-equations-and-functions>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

# Contenido 19

## Interpretación de gráficas formadas por secciones rectas y curvas

Hay fenómenos que, por su comportamiento cambiante, se representan en forma gráfica con una sucesión de segmentos de recta o de rectas y curvas. Por ejemplo, ¿cómo puede describirse el desplazamiento de un automóvil que cambia de velocidad, o los cambios ecológicos que ocurren en una región?

Te recomendamos la lectura

"Gráficas de funciones" y otros temas, en Hernández Garcíadiego, C., *Matemáticas y deportes*, México, Santillana, 2007.

### 19.1. Gráficas de segmentos de recta

#### Problema inicial

Irene va a visitar a su amiga Karina. Sale de su casa y, al poco rato de caminar, se encuentra con Teresa, quien con gusto se ofrece a acompañarla. Siguen las dos caminando y platicando hasta llegar a casa de Karina.

Completa esta historia tomando como base la información que presenta la gráfica.

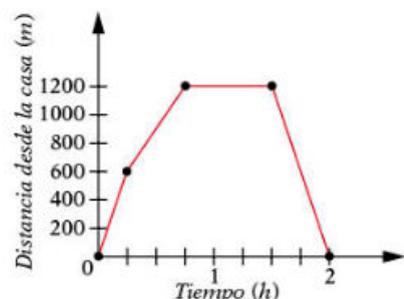
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



#### Exploración y discusión

- ¿A qué distancia de la casa de Irene está la casa de Karina? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo estuvo Irene fuera de su casa? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo después de haber empezado su trayecto, Irene encontró a Teresa? \_\_\_\_\_
- ¿Qué distancia había caminado Irene cuando encontró a Teresa? \_\_\_\_\_
- ¿Qué distancia caminaron juntas Irene y Teresa para llegar a casa de Karina? \_\_\_\_\_
- ¿Cuándo caminó más rápidamente Irene: cuando iba sola o cuando la acompañó Teresa? \_\_\_\_\_ ¿En qué razones basas tu respuesta? \_\_\_\_\_ Discútelo con un compañero.
- ¿Cuánto tiempo estuvieron de visita en casa de Karina? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo tardó Irene en llegar desde su casa a la de Karina? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo tardó Irene en regresar desde la casa de Karina a su casa? \_\_\_\_\_
- En promedio, ¿cuándo caminó más rápido: en la ida o en el regreso? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, describan en el grupo lo siguiente, con base en la gráfica:

- El recorrido de Karina y los tiempos empleados en él, desde que salió de casa hasta que regresó.
- Y al revés: desde su regreso hasta su salida de casa.

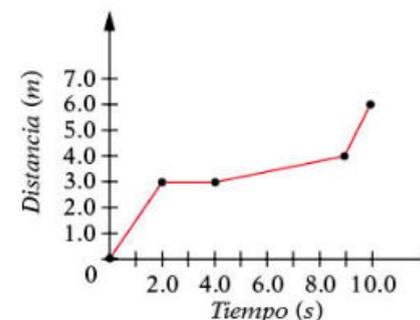
Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales



Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas de interpretación de gráficas:

- La siguiente gráfica describe el movimiento de un gato que se pasea por el parque. Utilicen la información que se da en ella para contestar las preguntas que se plantean.



- ¿Cuál fue la distancia total recorrida por la mascota? \_\_\_\_\_
- ¿En cuánto tiempo la recorrió? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos metros recorrió en los primeros 4 segundos? \_\_\_\_\_
- ¿En qué momento se movió con mayor rapidez: durante los primeros 2 segundos o en los últimos 8 segundos? \_\_\_\_\_
- ¿Hubo algún momento en que se detuvo? \_\_\_\_\_
- Si se detuvo en algún momento, ¿durante cuánto tiempo lo hizo? \_\_\_\_\_
- Utilicen la información que da la gráfica para completar la tabla.

	Antes del descanso	Después del descanso
Tiempo que caminó		
Distancia que recorrió		

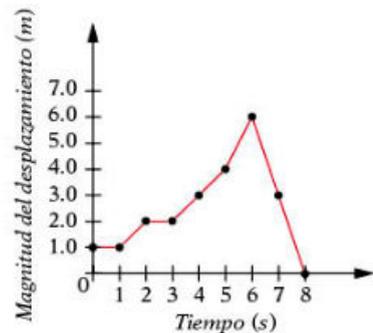
- Escriban una historia que corresponda a la gráfica.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

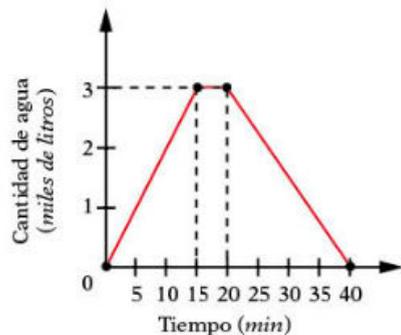
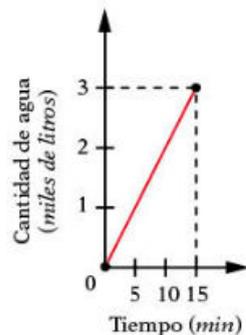
2. En la gráfica se muestra el desplazamiento de un ratón que corre por un túnel angosto y recto. (El origen es la entrada del túnel.)



- a) ¿Cuánto tiempo permanece el ratón en el túnel? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuántos metros recorrió en total? \_\_\_\_\_
- c) ¿En qué momento comenzó a moverse el roedor? \_\_\_\_\_
- d) ¿En qué parte del túnel estaba el ratón cuando empezó a moverse? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuántos metros avanzó por el túnel? \_\_\_\_\_
- f) ¿Descansó en algún momento? \_\_\_\_\_ ¿Por cuánto tiempo? \_\_\_\_\_
- g) En cierto momento, el ratón decidió salir corriendo del túnel. ¿Cuánto tiempo duró la carrera hasta la entrada del túnel? \_\_\_\_\_

Muchos fenómenos de la vida real pueden describirse mediante una recta en el plano cartesiano. En ocasiones se dan cambios en el comportamiento del fenómeno que no pueden ser descritos por una sola recta, pero sí por una sucesión de segmentos de recta.

3. Interpreten las siguientes gráficas:



- a) ¿Cómo varía la cantidad de agua que hay en cada sistema conforme avanza el tiempo? \_\_\_\_\_
- b) ¿De qué manera están relacionadas las dos gráficas? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus interpretaciones de las gráficas anteriores. Expliquen, además, en qué casos el comportamiento de un fenómeno puede describirse mediante una sucesión de segmentos de recta. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Usemos las TIC**



- Observa los videos "Interpretación de gráficas formadas por segmentos" y "Llenado de recipientes" para estudiar las gráficas formadas por segmentos de recta que modelan fenómenos de variación:
  - <http://ventana.televisionedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/4/1363>
  - <http://ventana.televisionedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/4/1373>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

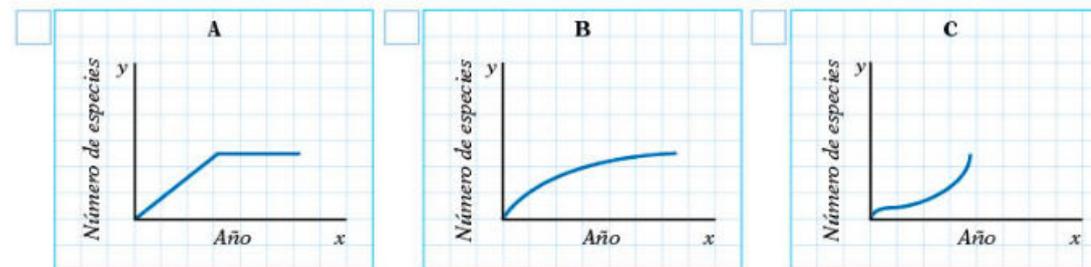
**19.2. Gráficas formadas por secciones rectas y curvas**

**Problema inicial**

Supongamos que una isla volcánica surgió en el año 1900 y que, poco a poco, fueron habitándola diversas especies de aves. El número de especies que la han habitado se da en la siguiente tabla:

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Número de especies	0	1	5	17	30	30	30

¿Cuál de las siguientes gráficas muestra esta situación? Márcala con una (✓).



**Exploración y discusión**

- a) ¿Los incrementos en el número de años son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_  
 ¿Los incrementos en el número de especies de aves son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_  
 ¿Hay alguna relación entre los valores de estas variables? \_\_\_\_\_  
 ¿Cuáles? \_\_\_\_\_
- b) ¿Alguna de las gráficas muestra la estabilidad en el número de especies de aves en varios años? \_\_\_\_\_
- c) ¿Hay algunos datos de la tabla que te ayuden a identificar la gráfica que le corresponde? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles? \_\_\_\_\_  
 Discútelos con un compañero.
- d) ¿Hay algunos puntos de la gráfica que puedan asociarlos con algunos datos de la tabla? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles? \_\_\_\_\_
- e) ¿Hay alguna relación entre los valores de las variables de la tabla, que les ayude a identificar la gráfica que le corresponde? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles? \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

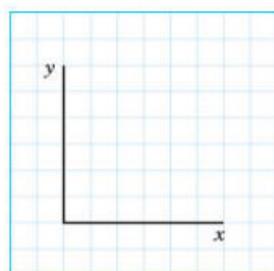


Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades:

- Supongan ahora que, por alguna razón, a partir de 1960, algunas de esas especies fueron abandonando la isla. El número de especies que han quedado en la isla se da en la siguiente tabla.

Año	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Número de especies	30	29	25	13	12	10	10	10	10

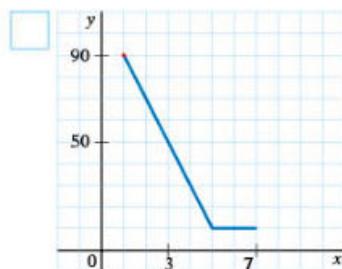
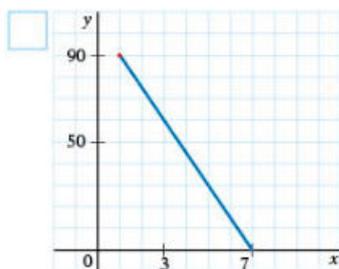
- Tracen la gráfica que muestre esta situación.



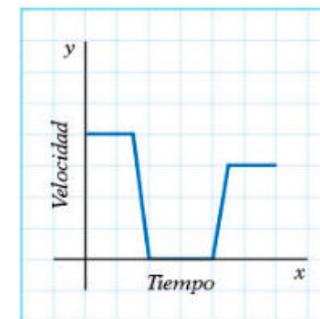
- La línea que une, por ejemplo, los datos de 1965 a 1970, ¿debe ser recta o curva? ¿Y la que une los datos de 1970 a 1975? ¿En qué razones basan su respuesta?

- Sin trazar punto por punto, elijan la gráfica que mejor represente el fenómeno descrito en la siguiente tabla. ¿Cuál es el nivel de alcohol en la sangre después de tomar tres vasos de cerveza?

Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6	7
Alcohol en la sangre (mg/100 ml)	90	75	60	45	30	15	0

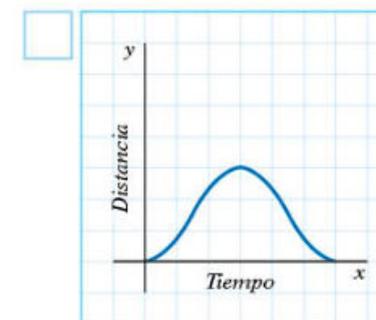
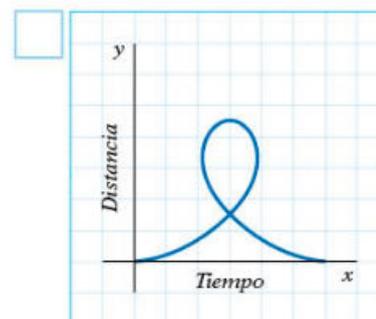


- A continuación se describen dos situaciones. ¿Cuál de ellas se ajusta más a la información que proporciona la gráfica? Márcala con una (✓).


 Cuando Carmen fue a visitar a su amiga Teresa, caminó un rato, bajó por una pendiente y luego subió otra. Finalmente, caminó en un terreno plano y tocó la puerta de la casa de Teresa.

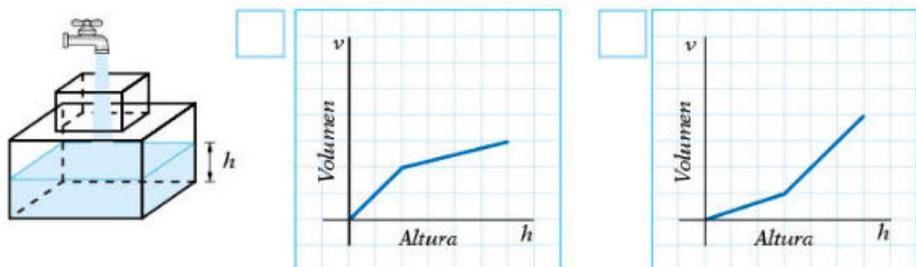
 Carmen conducía su coche a cierta velocidad. Un agente de tránsito le pidió que se detuviera y, después de recibir la infracción, continuó su camino, esta vez respetando el límite de velocidad.

- Un *bumerang* es un objeto de madera, doblado por el centro, de modo que lanzado con movimiento giratorio, puede volver al punto de partida. ¿Cuál de las dos gráficas *Distancia contra Tiempo* representa mejor el fenómeno que se observa al lanzar un *bumerang*? Márcala con una (✓).

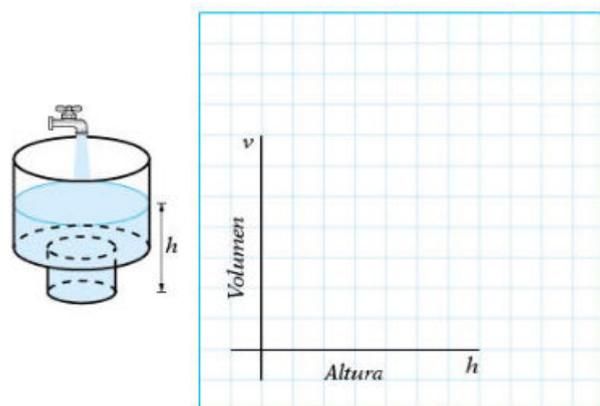
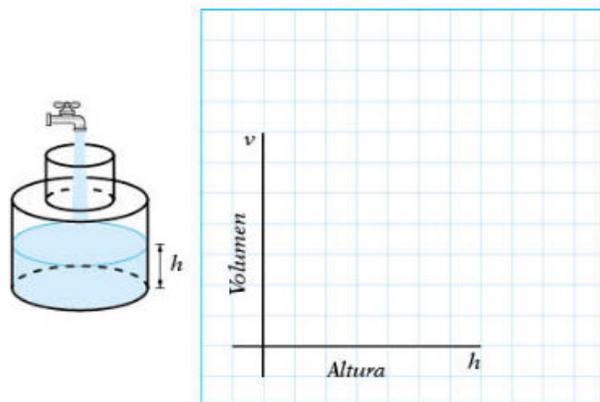


¿Por qué una de las gráficas no puede representar esta situación? \_\_\_\_\_

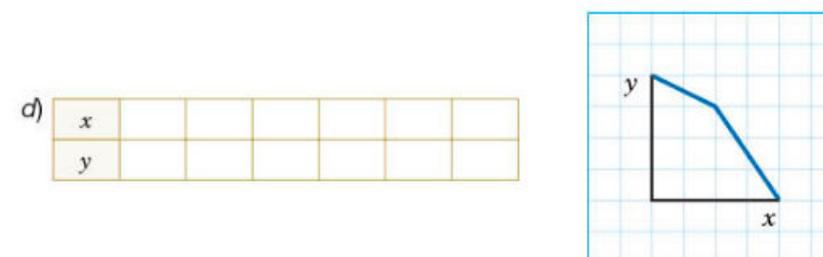
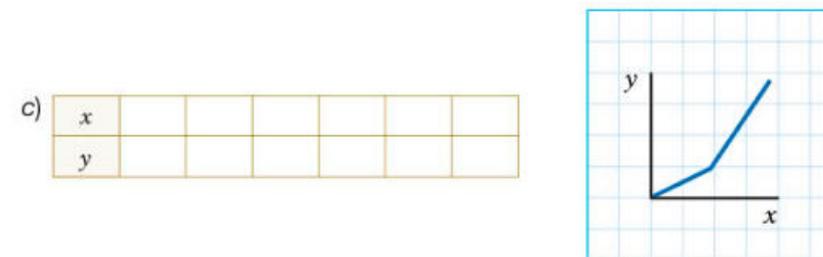
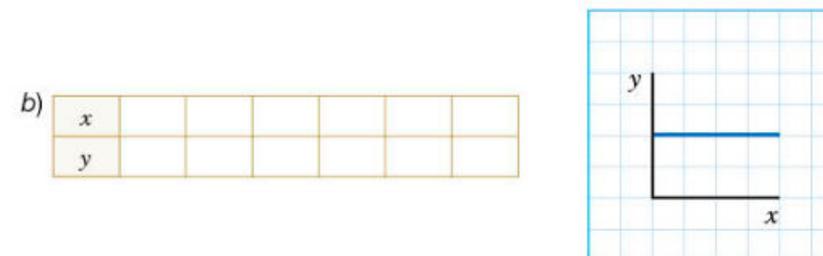
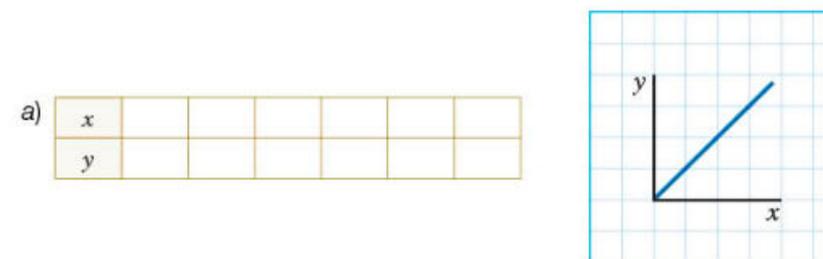
5. Tomen en cuenta el volumen del recipiente que se está llenando con un líquido. ¿Cuál de las dos gráficas *Volumen contra Altura* representa mejor el fenómeno?



6. En cada caso, tracen la gráfica *Volumen contra Altura* que represente el fenómeno de llenado del recipiente formado por dos partes cilíndricas.



7. Elaboren una tabla de valores que podría corresponder a cada una de las siguientes gráficas.



**Usemos las TIC**

• Observa el video "Llenado de recipientes" para estudiar gráficas formadas por segmentos de recta y curva, y las situaciones que las modelan:

– <http://ventana.televiseducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/3/1784>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)



Con la ayuda de su profesor, comparen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Si es necesario, corrijan. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Qué actividad podrían realizar en el patio de la escuela de manera que fuese posible representarla mediante una gráfica de segmentos rectos?
- ¿Qué otra actividad podría representarse mediante segmentos rectos y curvos?

Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Eventos de azar independientes

Al lanzar un dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que en los dos lanzamientos caiga el 6?

### 20.1. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de eventos independientes

#### Problema inicial

Se colocaron cuatro canicas del mismo tamaño en un frasco: dos rojas y dos verdes. Y se realizan los dos siguientes experimentos:



Experimento 1	Experimento 2
Saco una canica al azar y registro su color. La regreso al frasco. Luego, saco una canica al azar y registro su color.	Saco dos canicas al azar.

En el experimento 1, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos canicas rojas? \_\_\_\_\_

En el experimento 2, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos canicas rojas? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



a) ¿Son iguales ambas probabilidades? ¿Por qué? Escribe tu respuesta y tus argumentos en el siguiente recuadro. Después, discute tu propuesta con un compañero.

b) La siguiente tabla muestra todos los resultados posibles (espacio muestral) del experimento 1:

		Resultados posibles del experimento 1			
		Canica 2			
Canica 1		R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>
		R <sub>1</sub>	R <sub>1</sub> R <sub>1</sub>	R <sub>1</sub> R <sub>2</sub>	R <sub>1</sub> V <sub>1</sub>
R <sub>2</sub>	R <sub>2</sub> R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub> R <sub>2</sub>	R <sub>2</sub> V <sub>1</sub>	R <sub>2</sub> V <sub>2</sub>	
V <sub>1</sub>	V <sub>1</sub> R <sub>1</sub>	V <sub>1</sub> R <sub>2</sub>	V <sub>1</sub> V <sub>1</sub>	V <sub>1</sub> V <sub>2</sub>	
V <sub>2</sub>	V <sub>2</sub> R <sub>1</sub>	V <sub>2</sub> R <sub>2</sub>	V <sub>2</sub> V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub> V <sub>2</sub>	

- c) ¿Cuántos resultados diferentes pueden salir? \_\_\_\_\_ ¿En cuántos de ellos, ambas canicas son rojas? \_\_\_\_\_ En el experimento 1, ¿cuál es la probabilidad de que ambas canicas salgan rojas? \_\_\_\_\_
- d) Como en el experimento 2 se trata de extraer juntas un par de canicas, tendremos que investigar cuántos pares diferentes pueden salir (espacio muestral). Son cuatro canicas: R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, V<sub>1</sub> y V<sub>2</sub>. ¿Cuántos pares diferentes se pueden formar? \_\_\_\_\_ ¿En cuántos de ellos, ambas canicas son rojas? \_\_\_\_\_ En el experimento 2, ¿cuál es la probabilidad de que ambas canicas salgan rojas? \_\_\_\_\_
- e) ¿Son iguales las probabilidades en ambos experimentos? \_\_\_\_\_

Observa que en, el experimento 1, la probabilidad de que salga una canica roja en la segunda extracción no cambia, aunque en la primera también haya salido roja. Los *eventos son independientes*.

En cambio, en el experimento 2, la probabilidad de que la segunda canica del par extraído sea roja depende del color de la primera canica extraída; es decir, depende de si fue roja o verde. Los *eventos son dependientes*.

f) En el experimento 1, ¿cuál es la probabilidad de que la primera canica extraída sea roja? \_\_\_\_\_ ¿Y cuál es la probabilidad de que la segunda también sea roja? \_\_\_\_\_ Apliquen en ambos casos la fórmula de la probabilidad teórica. Multipliquen estas probabilidades. ¿El producto es igual a la probabilidad que obtuvieron mediante el conteo? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Consideren la información que se presenta en el siguiente recuadro y escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Si dos eventos *A* y *B* son independientes, la probabilidad de que ocurran tanto *A* como *B* es:  $P(A) \times P(B)$ .  
A esta propiedad se le llama *regla del producto* para eventos independientes.

Actividades adicionales

1. Supón que se lanza dos veces una moneda. Considera los siguientes eventos:

A = "cae águila"      B = "cae sol"

- ¿Estos eventos son dependientes o independientes? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A en el primer lanzamiento? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento B en el segundo lanzamiento? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos eventos? \_\_\_\_\_



2. Cada una de las siguientes situaciones presenta un par de eventos de azar. Reúnete con un compañero para contestar las preguntas que se plantean.

- En una feria hay un juego que consiste en lanzar dardos sobre una ruleta, como la que aparece en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que, en el primer lanzamiento, el dardo dé en una región de color azul? \_\_\_\_\_  
¿Cuál es la probabilidad de que, en un segundo lanzamiento, se repita este resultado? \_\_\_\_\_ ¿Son independientes estos dos eventos? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_  
¿Cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos el dardo dé en una región azul? \_\_\_\_\_
- Tengo una moneda y un dado, y los lanzo dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que, en el primer lanzamiento, los resultados sean 6 y águila? \_\_\_\_\_  
¿Cuál es la probabilidad de que, en un segundo lanzamiento, se repitan estos resultados? \_\_\_\_\_ ¿Son independientes estos dos eventos? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_  
¿Cuál es la probabilidad de que, en ambos lanzamientos, caigan 6 y águila? \_\_\_\_\_
- Una caja contiene 36 chicles revueltos: 12 de menta, 12 de canela y 12 de hierbabuena. Diana toma uno al azar. Luego, llega Patricia y toma otro al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que a ambas les toque un chicle de canela? \_\_\_\_\_  
¿Son independientes estos dos eventos? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_



**Usemos las TIC**

- Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo calcular la probabilidad de eventos independientes:
  - <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-eventos-dependientes-e-independientes>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo las respuestas de los equipos a las preguntas anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- Si dos eventos son independientes, ¿la suma de sus probabilidades puede ser 1? Den un ejemplo.
- Si dos eventos son independientes, ¿la suma de sus probabilidades puede ser  $\frac{1}{2}$ ? Den un ejemplo.

Escriban en su cuaderno las conclusiones del grupo.

# EVALUACIÓN

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Núm. de lista \_\_\_\_\_



1. Colorea el alvéolo con la respuesta correcta en cada caso.

1. Para resolver una ecuación cuadrática, hice la siguiente sustitución en la fórmula general:

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

- A) 7 y 6
- B) 1 y -7
- C) 4 y -7
- D) 7 y -1

2. ¿Cuál es la forma general  $ax^2 + bx + c = 0$  de la ecuación  $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{2}) = 0$ ?

- A)  $6x^2 - x - 1 = 0$
- B)  $6x^2 - 2x - 1 = 0$
- C)  $6x^2 - x - 2 = 0$
- D)  $6x^2 - x + 2 = 0$

3. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas tiene como soluciones  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -2$ ?

- A)  $x^2 - x - 6 = 0$
- B)  $6x^2 - 2x - 3 = 0$
- C)  $6x^2 + x + 6 = 0$
- D)  $6x^2 - 3x + 2 = 0$

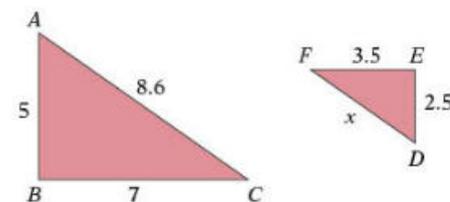
4. Las diagonales de ciertos cuadriláteros los dividen en cuatro triángulos rectángulos. ¿De qué cuadriláteros se trata?

- A) Del rectángulo y el rombo
- B) Del rectángulo y el cuadrado
- C) Del cuadrado y el rombo
- D) Del rombo y el romboide

5. La siguiente es una propiedad de todos los paralelogramos:

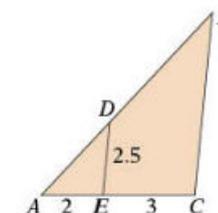
- A) Las diagonales son iguales.
- B) Los ángulos adyacentes son iguales.
- C) Los lados opuestos son iguales.
- D) Los ángulos opuestos son suplementarios.

6. Los triángulos ABC y DEF son semejantes. ¿Cuál es el valor de x?



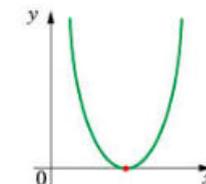
- A) 2.5 cm
- B) 3.5 cm
- C) 4.3 cm
- D) 5.1 cm

7. En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado BC. ¿Cuánto mide el lado BC?



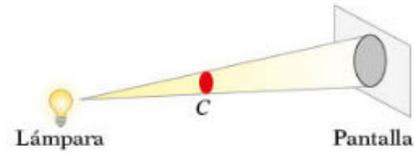
- A) 10
- B) 12.5
- C) 6.25
- D) 17.5

8. ¿Cuál de las siguientes funciones podría corresponder a la gráfica?



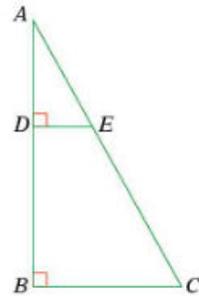
- A)  $y = x^2 - 5x - 6$
- B)  $y = x^2 - 2x + 4$
- C)  $y = x^2 - 4x + 4$
- D)  $y = x^2 - 5x + 6$

9. Un objeto circular  $C$ , de 12 cm de diámetro, se ilumina con una lámpara que se comporta como un punto luminoso. La sombra se proyecta sobre una pantalla paralela al objeto circular  $C$ . El centro de  $C$  está a 1 m de la lámpara y a 2.5 m de la pantalla. ¿Cuál es el diámetro de la sombra proyectada en la pantalla?



- A 35 cm  
 B 42 cm  
 C 3.5 m  
 D 4.2 m

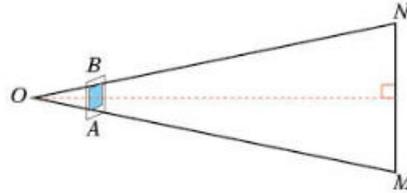
10. Carlos compró un librero con entrepaños móviles. En la figura se representan dos entrepaños  $BC$  y  $DE$  que Carlos ha colocado sobre la superficie vertical  $AB$ .



Si  $AB = 55$  cm,  $BC = 30$  cm y  $DE = 12$  cm, ¿cuál es la mayor altura que deben tener los libros, colocados en posición vertical, para que puedan ponerse en el entrepaño  $BC$ ?

- A 30 cm  
 B 31 cm  
 C 32 cm  
 D 33 cm

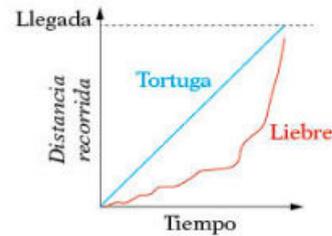
11. Una diapositiva de 24 mm de altura se encuentra a 3 cm de  $O$ . La imagen proyectada en la pantalla alcanza una altura de 2 m.



¿A qué distancia de  $O$  está la pantalla?

- A 25 cm  
 B 50 cm  
 C 1.25 m  
 D 2.5 m

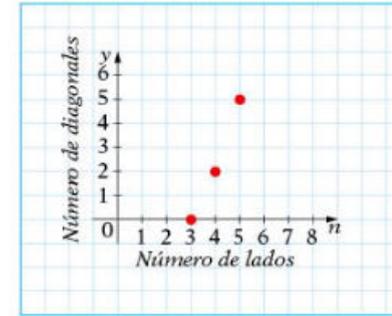
12. Cuenta la fábula de La Fontaine, que la Tortuga le dijo a la Liebre: "En una carrera, yo llego antes que tú a aquel mojón". La liebre aceptó el reto. La siguiente gráfica representa el movimiento de los dos animales.



De acuerdo con la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A En todo momento, la Tortuga va más rápido que la Liebre.  
 B La Liebre toma un camino con curvas.  
 C La Liebre en ningún momento se detiene.  
 D La Tortuga recorre distancias iguales en tiempos iguales.

Utiliza la siguiente información para contestar las preguntas 13 y 14. La gráfica que se muestra modela la relación entre el número de lados ( $n$ ) de un polígono y su número de diagonales ( $y$ ).



13. ¿Cuál es el valor de la ordenada cuando el de la abscisa es 8?

- A 8  
 B 9  
 C 10  
 D 20

14. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el número de lados ( $n$ ) de un polígono y su número de diagonales ( $y$ )?

- A  $y = n$   
 B  $y = n + 1$   
 C  $y = n(n - 3)$   
 D  $y = \frac{n(n - 3)}{2}$

II. Resuelve lo siguiente.

Una urna contiene cinco canicas del mismo tamaño: tres azules (que llamaremos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ ) y dos rojas ( $R_1$  y  $R_2$ ).



1. Se saca una canica al azar y resulta que es azul. Se devuelve la canica a la urna y se saca al azar otra canica. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea azul?

2. Se saca una canica al azar, se registra su color y se devuelve a la urna. Se saca al azar otra canica.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos canicas sean azules? (Para contestar, puedes hacer un diagrama de árbol.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

## La distancia de frenado de un vehículo

La distancia que recorre un vehículo desde el momento en que empieza a frenar hasta que se detiene por completo, se llama *distancia de frenado* ( $D_f$ ), y está dada por la fórmula:  $D_f = \frac{V^2}{254 \times f}$ , donde  $V$  es la velocidad del vehículo en kilómetros por hora y  $f$  es el coeficiente de adherencia al piso, el cual depende del estado en que esté el camino.

En un camino seco:  $f = 0.8$

En un camino mojado:  $f = 0.4$



La distancia de frenado de un vehículo es mayor cuando el piso está húmedo.

1. En una carretera seca, un vehículo recorrió 50 m desde el momento en que comenzó a frenar hasta que se detuvo completamente. ¿A qué velocidad  $V$  circulaba el vehículo?

- a) 178 km/h    b) 126 km/h    c) 100 km/h    d) 71 km/h

2. Supón ahora que la carretera estaba húmeda y que el vehículo recorrió también 50 m desde el momento en que empezó a frenar hasta que se detuvo por completo. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la velocidad  $V$  a la que circulaba el vehículo? Márcala con una (✓) y utilízala para determinar la velocidad  $V$ .

Expresión	Velocidad ( $V$ )
<input type="checkbox"/> $\sqrt{D_f \times 254 \times 0.8}$	
<input type="checkbox"/> $\sqrt{\frac{D_f \times 254}{0.4}}$	
<input type="checkbox"/> $\sqrt{D_f \times 254 \times 0.4}$	
<input type="checkbox"/> $\sqrt{\frac{D_f \times 254}{0.8}}$	

3. A continuación se presentan cuatro afirmaciones relacionadas con la distancia de frenado de un vehículo. Indica cuáles son verdaderas y cuáles son falsas subrayando la palabra respectiva.

Afirmación	La afirmación es...
Si se conduce un automóvil a una velocidad de 70 km/h, en pavimento seco, serán suficientes 50 m para frenar sin que ocurra un percance.	Verdadera/Falsa
Si el pavimento está mojado y se conduce un automóvil a una velocidad de 70 km/h, la distancia de frenado será de menos de 50 m.	Verdadera/Falsa
Si se conduce un automóvil a una velocidad de 70 km/h, sin importar que el pavimento esté seco o mojado, serán suficientes 50 m para frenar sin que ocurra un percance.	Verdadera/Falsa
Si el pavimento está seco y se conduce un automóvil a una velocidad de 70 km/h, la distancia de frenado rebasará los 50 m.	Verdadera/Falsa

## ¿De qué tamaño quiere la puerta?

Un carpintero fabricó una puerta formada por una pieza rectangular rematada por una semicircular.



4. La longitud de la pieza rectangular mide el doble de alto que de ancho y el área total de la puerta es de 2.785 m<sup>2</sup>. ¿Cuál es el ancho de la puerta? Muestra tus operaciones.

5. Un cliente quiere ese mismo modelo de puerta, pero que su altura sea 234 cm. ¿Qué expresiones algebraicas permiten calcular el ancho que debe tener la puerta?

- a)  $2x + \pi x = 234$                       c)  $2x + \frac{x}{2} = 234$   
 b)  $5x = 468$                                 d)  $2x + 2\pi x = 468$

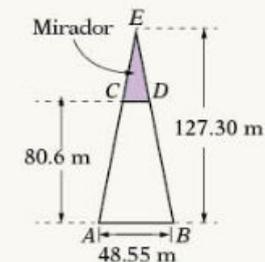
## La torre de Banobras

La torre de Nonoalco tiene una altura de 127.30 m, dividida en 24 niveles de oficinas más otro que funciona como mirador, desde el que se aprecia el conjunto habitacional en su totalidad.



Mirador

6. ¿Qué longitud tiene la base  $CD$  del mirador? Explica tu respuesta.

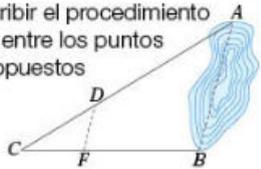
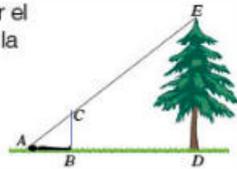


7. La fachada de la torre está cubierta por una cortina de vidrio, con excepción del mirador. ¿Qué fracción de la fachada, aproximadamente, quedó sin recubrir de vidrio? Muestra tus operaciones.

La torre de Banobras o torre de Nonoalco es el edificio distintivo del conjunto habitacional Nonoalco-Tlatelolco de la Cd. de México.

# AUTOEVALUACIÓN

¿Qué tanto has logrado los aprendizajes esperados? Identifica las situaciones que eres capaz de resolver y márcalas con una (✓). Puedo resolver problemas...

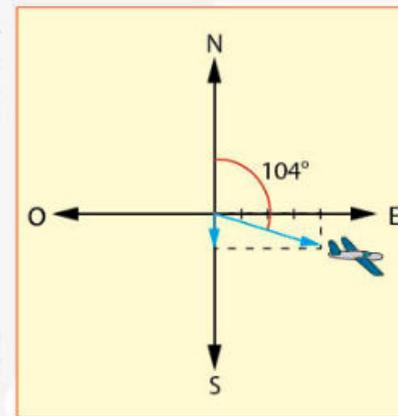
... aplicando la fórmula cuadrática, como:	
<input type="checkbox"/> $x^2 - 4x = 21$	<input type="checkbox"/> $(x + 5)(x - 1) = 27$
... de cálculo de distancias y alturas inaccesibles, como:	
<input type="checkbox"/> La anchura de un río aplicando los criterios de congruencia de triángulos.	<input type="checkbox"/> La altura de una torre aplicando criterios de semejanza de triángulos.
... aplicando el teorema de Tales, como:	
<input type="checkbox"/> A partir de la figura, describir el procedimiento para calcular la distancia entre los puntos A y B situados en lados opuestos del lago. 	<input type="checkbox"/> A partir de la figura, describir el procedimiento para calcular la altura del árbol. 
... aplicando la semejanza sobre figuras homotéticas, al...	
<input type="checkbox"/> ... ampliar o reducir una figura geométrica en una razón dada.	<input type="checkbox"/> ... identificar relaciones entre figuras homotéticas dadas.
... al interpretar y trazar gráficas de funciones cuadráticas, a partir de tablas valores o de su expresión algebraica, en situaciones como:	
<input type="checkbox"/> Determinar la expresión algebraica y la gráfica que representan la variación de la altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 50 m.	<input type="checkbox"/> Determinar la expresión algebraica y la gráfica que representan la variación del área de un rectángulo en función de su base (x), si su perímetro es de 12 cm.
... para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes, como:	
<input type="checkbox"/> Se lanza un dado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces salga el 6?	<input type="checkbox"/> Se lanza una moneda dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que primero caiga águila y después sol?
Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido con el estudio de este bloque.	Plantea un problema que ahora ya puedas resolver con los conocimientos y habilidades que desarrollaste en este bloque.
1. _____	_____
2. _____	_____
Escribe un problema planteado en los temas de este bloque, cuya resolución se te haya dificultado.	¿En qué tema o temas te gustaría tener más ayuda y por qué?
_____	_____
_____	_____
En este bloque, ¿en qué consistió tu participación en la resolución de los problemas planteados?	Cuando en tu equipo un compañero daba una respuesta errónea a un problema propuesto, ¿de qué manera mostraste tu desacuerdo?
_____	_____
_____	_____

## ¿Quiénes utilizan la trigonometría?

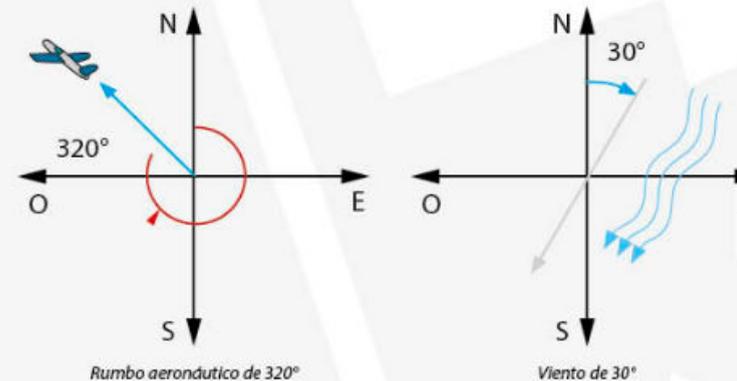
Muchas aplicaciones de la trigonometría implican cantidades que tienen magnitud y dirección, como las fuerzas, velocidades, aceleraciones y desplazamientos.

Un ejemplo de lo anterior es el problema típico de aeronáutica, que consiste en calcular, por ejemplo, la rapidez resultante y el ángulo de dirección del vuelo de un avión cuya velocidad en aire tranquilo es de 400 km por hora, que vuela en dirección este en un viento que sopla de norte a sur a 100 km por hora.

Los conocimientos de trigonometría permiten encontrar que el avión navega con una rapidez de 412 km por hora y su curso es de 104°.



Uso de las rectas norte-sur y este-oeste para hallar los ángulos de dirección de la navegación aérea, los cuales se miden en el sentido de las manecillas del reloj.



### PROYECTO DEL BLOQUE

#### Medir alturas de modo indirecto

Formen un equipo de cuatro compañeros para construir un goniómetro (vean las instrucciones en la página 179) y consigan una cinta métrica de 20 metros. Usen estos instrumentos y unas tablas trigonométricas para calcular, de manera indirecta, la altura de algunos edificios, monumentos, casas y árboles de su localidad que les parezcan interesantes. En este bloque, los contenidos 24, 25 y 27 les ayudarán a desarrollar el proyecto.

# BLOQUE

# IV

## Aprendizajes esperados:

El alumno:

Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.

- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

## Sucesiones

En la siguiente sucesión de figuras, ¿cuántos palillos se necesitan para formar la figura 10?



¿Cuál es la regla que gobierna a la sucesión 2, 7, 16, 29, 46, ...?

**Te recomendamos la lectura**  
 "Números figurados", en Ruiz, C. et al., *Crónicas geométricas*, México, Santillana, 2002b.

### 21.1. Patrones numéricos y de figuras

#### Problema inicial

¿Cuál es el número que sigue de 53 en la sucesión 5, 11, 21, 35, 53, ...? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



a) ¿Tu compañero propone una respuesta diferente de la tuya? \_\_\_\_\_ ¿En qué razones basan ambos sus respuestas? \_\_\_\_\_

b) Una pareja de estudiantes propuso iniciar la búsqueda de un patrón para determinar el término que sigue de 53, tomando en cuenta las diferencias entre términos sucesivos. Completen la siguiente tabla de diferencias:

Términos	5	11	21	35	53	?
1as. diferencias		$11 - 5 = 6$	$21 - 11 = 10$	$35 - 21 = 14$		

c) ¿Qué patrón se forma en el primer reglón de diferencias: 6, 10, 14...? \_\_\_\_\_

Para que este patrón continúe, ¿qué número debe venir después del 14? \_\_\_\_\_

¿Y qué número seguiría de éste? \_\_\_\_\_

d) Repitan el proceso con la sucesión que obtuvieron:

Términos	5	11	21	35	53	?
1as. diferencias		6	10	14		
2as. diferencias			4			

e) Para que el patrón continúe en el segundo reglón, ¿qué número debe venir después del 53? \_\_\_\_\_

f) ¿Qué regularidad observan en el segundo reglón de diferencias? \_\_\_\_\_

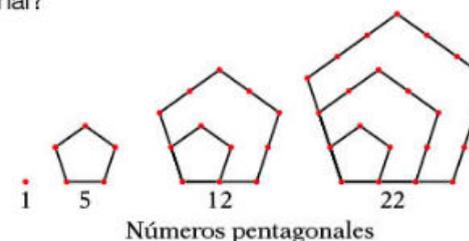
A este método de encontrar términos faltantes de una sucesión se le llama *método de diferencias*.



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus respuestas a los problemas anteriores; corrijan si es necesario.

#### Actividades adicionales

1. El matemático griego Pitágoras estudiaba, entre otras cosas, los llamados *números figurados*, los cuales se representan por puntos en arreglos triangulares, cuadrados, pentagonales, etcétera. Así, los primeros cuatro números pentagonales son 1, 5, 12 y 22, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el quinto número pentagonal?



a) ¿Percibes algún patrón que permita encontrar el quinto número pentagonal a partir de los cuatro primeros? \_\_\_\_\_ ¿En qué consiste ese patrón? \_\_\_\_\_



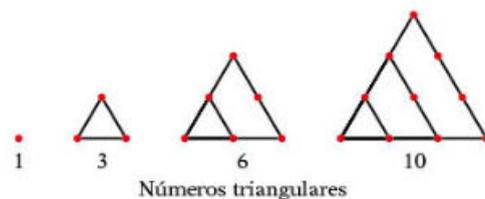
Reúnete con un compañero para analizar y resolver este problema.

b) ¿De cuántos puntos consta el quinto número pentagonal? \_\_\_\_\_ ¿Cómo aplicarían el método de diferencias para encontrarlo? Elaboren por escrito una descripción del proceso que seguirían para encontrarlo y aplíqueno. \_\_\_\_\_

Términos	1	5	12	22	
----------	---	---	----	----	--

c) En la sucesión de números pentagonales, tracen la figura que corresponda al quinto término. ¿Cuántos puntos tiene? \_\_\_\_\_ ¿Coincide este resultado con el que encontraron con el método de diferencias? \_\_\_\_\_ Si no es así, revisen el trabajo realizado.

2. Los primeros cuatro números triangulares son 1, 3, 6 y 10. ¿Cuál es el quinto número triangular? ¿Cómo aplicarían el método de diferencias para encontrarlo? Elaboren por escrito una descripción del proceso que seguirían para encontrarlo.



Tracen en la sucesión de números triangulares la figura que corresponda al quinto término y verifiquen que su número de puntos coincida con el número encontrado con el método de diferencias.



Coordinados por su profesor, expliquen en el grupo el proceso que siguieron para resolver los dos problemas anteriores y los resultados que obtuvieron. Anoten en sus cuadernos las conclusiones a que lleguen en el grupo.

3. En cada caso, completa los procesos de encontrar el sexto término de la sucesión:



c) Compara tus respuestas con las de un compañero. En caso de que no coincidan, analicen los procedimientos que siguieron y las razones que los sustentan para llegar a un acuerdo.

Para la siguiente sesión requieres traer cartoncillo, pegamento blanco, y palillos o clips enderezados.

4. Para cada una de las siguientes sucesiones, halla los términos sexto y séptimo:



c) Compara tus respuestas con las de otro compañero. Si no coinciden, analicen los procedimientos que siguieron y las razones que los sustentan para llegar a un acuerdo.



Con la ayuda de su profesor, discutan en el grupo la posibilidad de encontrar el término ubicado en la posición 100 de cada una de las sucesiones analizadas en esta lección y las dificultades que implica la realización de los cálculos.

5. El método de diferencias no siempre funciona. En particular, hay dos sucesiones famosas en matemáticas: las sucesiones de Fibonacci y de Lucas. Analízalas y descubre cómo se forman. En cada recuadro, intenta aplicar el método de diferencias para ver qué sucede.

a) Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

b) Sucesión de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123,...

### 21.2. Generando sucesiones

#### Problema inicial

Las expresiones algebraicas  $2n + 3$  y  $2n^2 + 5n - 4$  son las reglas generales de dos sucesiones, cuyos primeros seis términos son:

$$2n + 3: \quad 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

$$2n^2 + 5n - 4: \quad 3, 14, 29, 48, 71, 98, \dots$$

Si elaboras la tabla de diferencias de cada sucesión, ¿cuántos renglones de diferencias piensas que deben calcularse en cada caso, para que aparezca una de valores constantes? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión

a) Calcula las diferencias entre los términos consecutivos de cada una. Observa que ahora se usarán columnas, en lugar de renglones, para obtener los valores constantes.

Posición del término	Término que ocupa esa posición
$n$	$2n + 3$
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Posición del término	Término que ocupa esa posición
$n$	$2n^2 + 5n - 4$
1	3
2	14
3	29
4	48
5	71
6	98

b) ¿Qué columna de la tabla de diferencias está formada por valores constantes en la sucesión  $2n + 3$ ? \_\_\_\_\_ ¿Y en la sucesión  $2n^2 + 5n - 4$ ? \_\_\_\_\_

c) La expresión de primer grado  $3n - 1$  es la regla de una sucesión. Obtén los primeros cinco términos de esta sucesión y encuentra sus diferencias. ¿Cuántas columnas supones que debes calcular para que aparezca una de valores constantes? \_\_\_\_\_

$n$	$3n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

d) ¿Cuántas columnas de diferencias tuviste que calcular para encontrar la de valores constantes? \_\_\_\_\_ ¿El número de columnas de diferencias que calculaste es el mismo que el de la sucesión  $2n + 3$  o que el de  $2n^2 + 5n - 4$ ? \_\_\_\_\_

e) La expresión de segundo grado  $n^2 + 2n - 1$  es la regla de una sucesión. Obtén los primeros cinco términos de esta sucesión y encuentra sus diferencias. ¿Qué columna de su tabla de diferencias estará formada por valores constantes: la primera o la segunda? Verifícalo a continuación:

$n$	$n^2 + 2n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

f) La expresión de tercer grado  $n^3 - 1$  es la regla de una sucesión. ¿Qué columna de su tabla de diferencias supones que estará formada por valores constantes? Verifícalo a continuación:

$n$	$n^3 - 1$
1	
2	
3	
4	
5	



¿A qué conclusión llegaste después de realizar las actividades anteriores? Con la ayuda de tu profesor, compártela con tus compañeros de grupo y entre todos acuerden una conclusión general. Anótenla en sus cuadernos.

Actividades adicionales

1. La regla de una sucesión es  $7n - 6$ .

a) Encuentra sus primeros cinco términos haciendo  $n = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .

$n$	$7n - 6$
1	
2	
3	
4	
5	

b) ¿En qué columna de diferencias aparece un valor constante?

c) ¿Qué relación observas entre ese valor constante y la expresión  $7n - 6$ ?

d) Si la regla de una sucesión es  $5n - 1$ , ¿qué valor supones que aparecerá en la columna de valores constantes de la tabla de diferencias? Elabora la tabla para verificar tu suposición.

2. La regla de una sucesión es  $3n^2$ .

a) Encuentra sus primeros cinco términos haciendo  $n = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .

$n$	$3n^2$
1	
2	
3	
4	
5	

b) ¿En qué columna de diferencias aparece un valor constante?

c) ¿Qué relación observas entre ese valor constante y la expresión  $3n^2$ ?

d) Si la regla de la sucesión es  $5n^2$ , ¿qué valor supones que aparecerá en la columna de valores constantes de la tabla de diferencias? ¿Y si la regla de la sucesión es  $2n^2$ ? ¿Y si la regla es  $10n^2$ ? Elabora las tablas correspondientes para verificar tu suposición.

e) Compara tus respuestas con las de un compañero y traten de llegar a una conclusión sobre la relación que existe entre el valor constante que se obtiene con el método de diferencias y la expresión algebraica de la sucesión. ¿A qué conclusión llegaron?

f) Si la regla de una sucesión es del tipo  $an^2$ , ¿qué relación habrá entre el valor de  $a$  y el de la columna de valores constantes de la tabla de diferencias?

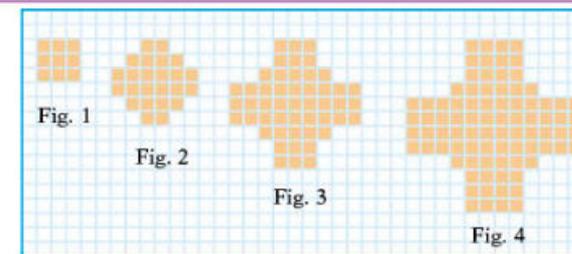


Con la ayuda de su profesor, presenten y discutan en el grupo las conclusiones de los equipos. Anoten en sus cuadernos la conclusión grupal que obtengan.

21.3. Simbolización de sucesiones

Problema inicial

Observa la sucesión de figuras de la derecha.



¿Cómo será la quinta figura?

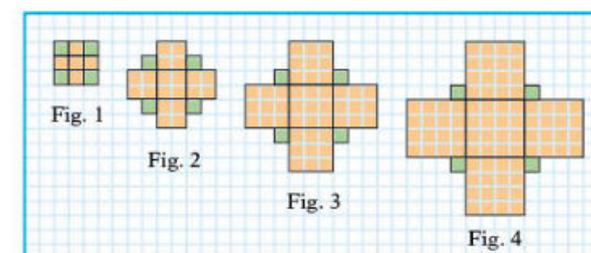
¿Cuántos cuadrillos tiene? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos cuadrillos tiene la décima figura de esta sucesión? \_\_\_\_\_

¿Cuál supones que sea la expresión algebraica que permita determinar el número de cuadrillos que forman cualquier figura de la sucesión?

Exploración y discusión



a) A continuación se presenta la misma sucesión, pero ahora se remarcan y se colorean las figuras para resaltar algunas partes, de modo que pueda percibirse un patrón en la formación de figuras. ¿Cuál es el patrón en este caso? Discútelo con un compañero.



b) ¿Cómo son la quinta y la décima figuras de la sucesión? ¿Cuántos cuadrillos tiene cada una?

c) Expresen algebraicamente el patrón que encontraron. ¿Cuál es esa expresión?

d) Para resolver el problema mediante el método de diferencias, se requiere conocer algunos términos de la sucesión; es decir, necesitamos contar cuántos cuadrillos forman las primeras cuatro figuras. ¿Cuáles son los primeros cuatro términos de la sucesión? Anótenlos en la siguiente tabla.

Número de figura (n)	1	2	3	4
Número de cuadrillos en esa figura				

e) Usen la tabla anterior para hallar las diferencias entre los términos de la sucesión.

¿En qué columna se obtuvo un valor constante? \_\_\_\_\_

f) La regla de esta sucesión es una expresión algebraica del tipo  $an^2 + bn + c$ . Al asignar a la literal  $n$  los valores 1, 2, 3 y 4 y aplicar el método de diferencias, se obtiene la siguiente tabla de valores generales:

$n$	$an^2 + bn + c$		
1	$a + b + c$	}	$3a + b$
2	$4a + 2b + c$		
3	$9a + 3b + c$	}	$5a + b$
4	$16a + 4b + c$		
			$7a + b$
			$2a$
			$2a$

¿Cómo pueden utilizarse las tablas de los incisos d) y e) y la tabla anterior de valores generales, para calcular el valor de  $a$  de la regla  $an^2 + bn + c$ ?

¿Cuál es el valor de  $a$ ?

- g) ¿Qué valor de las tablas de los incisos d) y e) le corresponde a la expresión  $3a + b$  de la tabla de valores generales?
- h) Después de sustituir la literal  $a$  por su valor en la expresión  $3a + b$ , ¿cuál es el valor de  $b$  de la regla  $an^2 + bn + c$ ?
- i) ¿Qué valor de tabla de los incisos d) y e) le corresponde a la expresión  $a + b + c$  de la tabla de valores generales?
- j) Luego de sustituir las literales  $a$  y  $b$  por sus valores respectivos en la expresión  $a + b + c$ , ¿cuál es el valor de  $c$  de la regla  $an^2 + bn + c$ ?
- k) Sustituyan las literales  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la regla  $an^2 + bn + c$  para obtener la expresión algebraica que permite determinar el número de cuadritos que forman cualquier figura de la sucesión del problema inicial. ¿Cuál es la expresión?



Con la ayuda de su profesor, discutan en el grupo las expresiones algebraicas que obtuvieron los equipos y expliquen los procedimientos que utilizaron. Anoten en sus cuadernos las conclusiones a que llegó el grupo.

Actividades adicionales

1. La expresión algebraica de la regla de la sucesión 5, 12, 19, 26, 33, ... puede encontrarse a partir de una tabla de valores generales para sucesiones.

$n$	
1	5
2	12
3	19
4	26
5	33

a) ¿Con cuál de ellas se resuelve: la de primer grado ( $an + b$ ) o la de segundo grado ( $an^2 + bn + c$ )? Márcala con una (✓) y justifica tu respuesta.

$n$	$an + b$
1	$a + b$
2	$2a + b$
3	$3a + b$
4	$4a + b$
5	$5a + b$

$n$	$an^2 + bn + c$		
1	$a + b + c$	}	$3a + b$
2	$4a + 2b + c$		
3	$9a + 3b + c$	}	$5a + b$
4	$16a + 4b + c$		
			$7a + b$
			$2a$
			$2a$

- b) ¿Cuál es el valor de la literal  $a$  en este caso? ¿Y el de la literal  $b$ ?
- c) ¿Cuál es la expresión algebraica de la regla de la sucesión 5, 12, 19, 26, 33, ...?

2. La expresión algebraica de la regla de la sucesión 3, 6, 13, 24, 39, ... puede encontrarse a partir de una tabla de valores generales para sucesiones.

$n$	
1	3
2	6
3	13
4	24
5	39

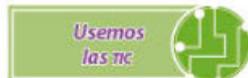
- a) ¿Con cuál de ellas se resuelve: la de primer grado ( $an + b$ ) o la de segundo grado ( $an^2 + bn + c$ )? ¿Por qué?
- b) ¿Cuál es el valor de la literal  $a$  en este caso? ¿Y el de  $b$ ? ¿Y el de  $c$ ? ¿Qué hiciste para obtener cada uno de estos valores?
- c) ¿Cuál es la expresión algebraica de la regla de la sucesión 3, 6, 13, 24, 39, ...?



3. Si conoces los primeros términos de una sucesión de primero o segundo grado, ¿cómo encuentras la expresión algebraica de la regla de esa sucesión a partir de la tabla de valores generales de  $an + b$  y de  $an^2 + bn + c$ ? Elabora por escrito una descripción del proceso que seguirías para hacerlo. Discútela con un compañero; expongan argumentos para llegar a un acuerdo.



En coordinación con su profesor, lean y discutan en el grupo las descripciones que redactaron los equipos. Anoten en el recuadro la conclusión a que se llegue en el grupo.



• Observa los videos "Sucesiones de figuras y expresiones cuadráticas" y "El método de las diferencias" para conocer más sobre sucesiones numéricas y de figuras:

- <http://ventana.televisedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/0>
- <http://ventana.televisedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/1786>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

**21.4. Actividades sobre patrones numéricos y de figuras**

1. Utiliza el método de diferencias para encontrar la expresión algebraica de la regla de las siguientes sucesiones numéricas. Trabaja con un compañero.

Sucesión	Regla
a) 0, 5, 10, 15, 20,...	
b) 2, 6, 12, 20, 30,...	
c) 2, 8, 18, 32, 50,...	
d) 11, 32, 63, 104, 155,...	

2. Utilicen el método de diferencias para hallar la expresión algebraica que permite encontrar el número de puntos que forman cualquier figura de las siguientes sucesiones:

Sucesión	Regla algebraica
a) <b>Números cuadrados</b> 	
b) <b>Números hexagonales</b> 	

3. ¿De cuántos palillos consta la figura que ocupa la posición 10 en cada una de las siguientes sucesiones?

Sucesión	Número de palillos que forman la figura 10
a)	
b)	

4. ¿De cuántos cuadritos consta la figura que ocupa la posición 15 en cada una de las siguientes sucesiones?

Sucesión	Número de cuadritos que forman la figura 15
a)	
b)	
c)	
d)	
e)	

5. Utilicen el método de diferencias para hallar la expresión algebraica que permite encontrar el número de puntos que forman cualquier figura de las siguientes sucesiones:

Sucesión	Regla algebraica
a)	
b)	
c)	
d)	
e)	



Coordinados por su profesor, presenten sus respuestas en el grupo y corrijan en caso necesario.

## Sólidos con superficies curvas

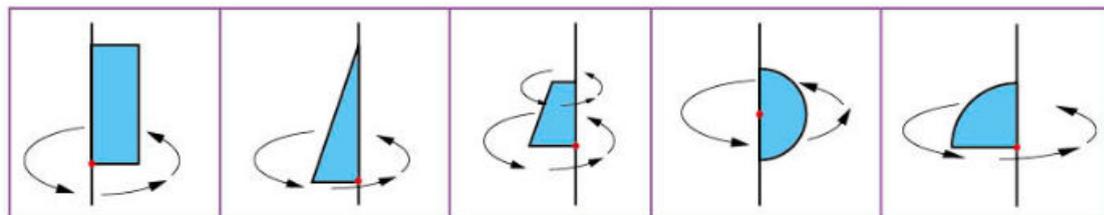
Los pozos, los tubos y algunos depósitos tienen forma cilíndrica; los embudos y algunos vasos tienen forma cónica. Las esferas las encontramos en deportes como el fútbol y el béisbol, y en la naturaleza, en las naranjas y los limones. ¿Qué otros ejemplos se te ocurren de objetos similares?

### 22.1. Generación del cilindro, del cono y de la esfera

#### Problema inicial

Realiza la siguiente actividad.

- **Material:** cartoncillo, pegamento blanco y palillos o clips enderezados.
- **Instrucciones:** traza en cartoncillo y recorta las siguientes figuras: un rectángulo, un triángulo rectángulo, un trapecio rectángulo, un semicírculo y un cuarto de círculo. Une con pegamento estas figuras a los palillos o clips enderezados, como se muestra en las siguientes figuras.

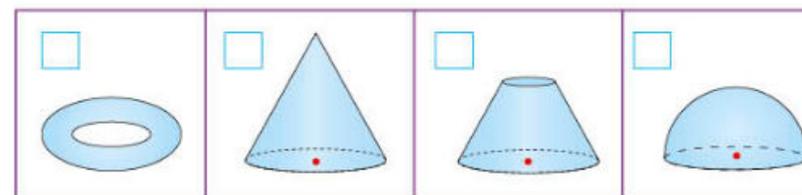


¿Qué sólidos se pueden formar si se da una vuelta completa a cada una de estas figuras alrededor del eje (palillo o clip)?

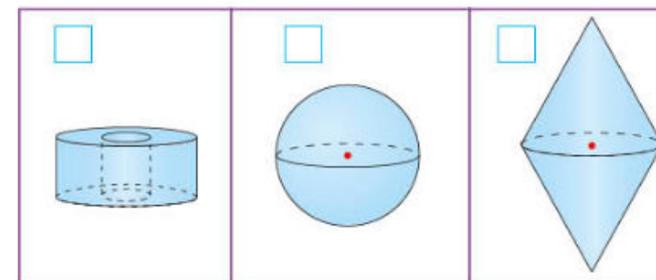
#### Exploración y discusión

- Describe el sólido que se forma al girar el rectángulo en torno al palillo (que funciona como eje del sólido): ¿Qué parte de ese sólido es generado por el lado opuesto al eje? ¿Qué partes del sólido son generadas por los otros dos lados del rectángulo? Discute tus respuestas con un compañero.
- ¿Qué sólido se forma al girar el triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos?
- Describan el sólido que se forma al girar el trapecio en torno del eje, como se indica en la ilustración.
- ¿En qué se parecen los sólidos que se generan al dar una vuelta completa al semicírculo en torno de su diámetro y al cuarto del círculo en torno de su radio?

- Las siguientes figuras muestran algunos sólidos de revolución. ¿Cuáles de ellos NO se forman al girar las figuras planas anteriores en torno al eje indicado? Márquenlos con una (✓).



- ¿Cuál de los siguientes sólidos de revolución SÍ se forma? Márquenlo con una (✓).

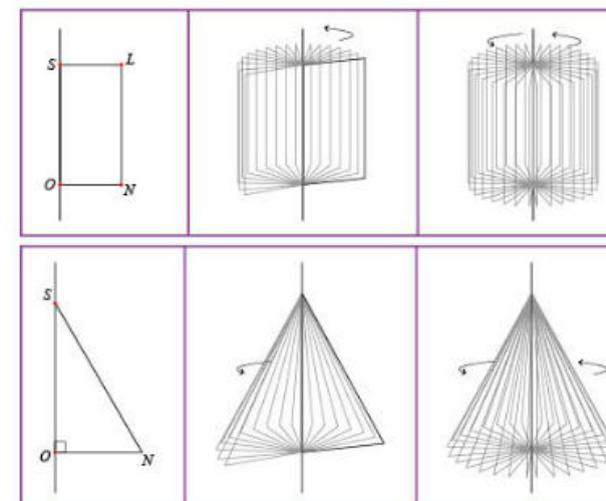


Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo las respuestas de los equipos a las preguntas anteriores. Tomen nota de las conclusiones a que se llegue en el grupo.

#### Actividades adicionales

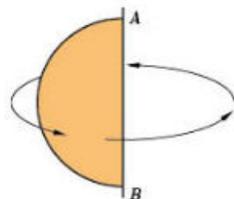


- Analiza junto con un compañero las siguientes figuras, que muestran la manera en que se generan un cilindro y un cono.

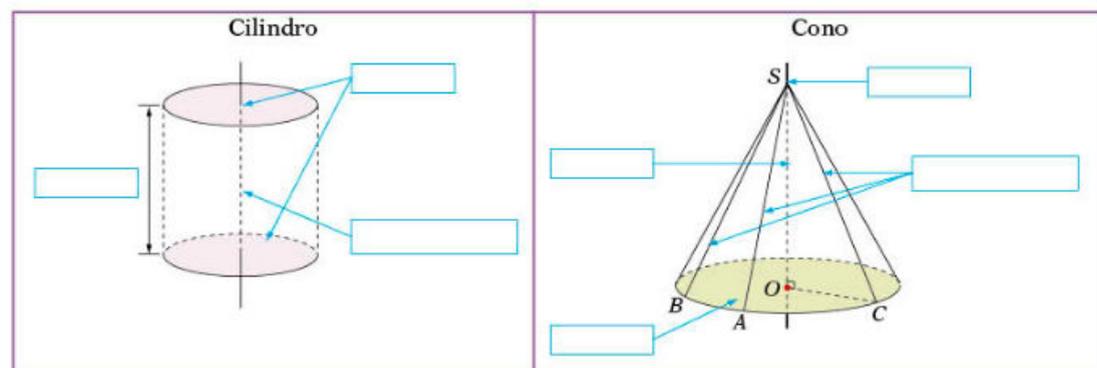


- ¿Cuál de los lados del rectángulo es el eje del cilindro? ¿Cuál de los lados es la altura del cilindro? ¿Qué figura describen los puntos  $N$  y  $L$  en su recorrido en torno al eje? ¿Cuáles de los segmentos ( $SL$ ,  $ON$ ,  $LN$ ) generan las bases del cilindro? ¿Qué lados del rectángulo son radios del cilindro?

- b) El lado  $LN$  del rectángulo, paralelo al eje, en cada una de las infinitas posiciones que toma, se llama *generatriz del cilindro*. ¿En cuál de los lados del triángulo encontramos la generatriz del cono?
- c) ¿Qué lado del triángulo rectángulo es el radio del cono? ¿Y qué lado es la altura del cono?
2. Se genera una esfera por la rotación completa de un semicírculo alrededor de su diámetro. Todo punto de la semicircunferencia describe, en la rotación, una circunferencia. ¿Dónde se ubica el centro de cada una de esas circunferencias? Márquenlo en la siguiente figura.



3. Para cada sólido, anoten en los recuadros el nombre de cada elemento.



4. ¿Qué es un *cilindro de revolución*? ¿Y un *cono de revolución*? En sus cuadernos, redacten una definición para cada uno de estos sólidos.



Con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo las definiciones que redactaron. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Cómo tendría que ser una figura plana para que, al girarla en torno a uno de sus lados, se genere un cilindro con altura y diámetro de la misma medida?
- ¿Y cómo tendría que ser para que se genere un cono cuya altura mida el doble que el diámetro?
- ¿Y cómo tendría que ser para que se genere una esfera de 314 mm de circunferencia?

Tomen nota de las conclusiones a que se lleguen en el grupo.

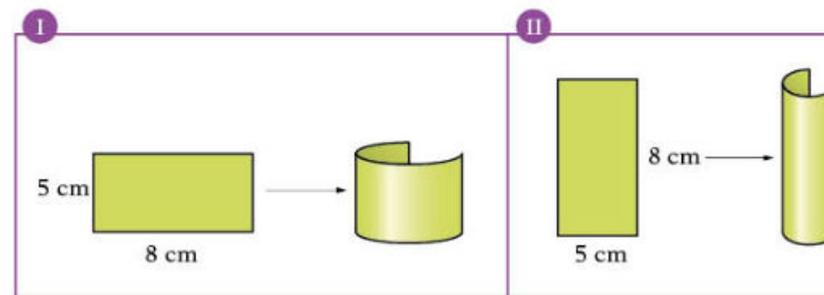
Para la siguiente sesión requieres traer regla, compás y cartulina.

## 22.2. Desarrollos planos de cilindros y conos rectos

### Problema inicial

Otra forma de obtener un cilindro consiste en curvar un rectángulo de papel, cartoncillo o lámina metálica, de modo que coincidan sus lados opuestos.

De una hoja de papel, recorta dos rectángulos de 8 cm por 5 cm, y forma con ellos los cilindros que se muestran en la figura.



¿Cuánto mide la altura del cilindro I? \_\_\_\_\_ ¿Qué longitud tiene la circunferencia de su base? \_\_\_\_\_ ¿Cuánto mide la altura del cilindro II? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de su base? \_\_\_\_\_

### Exploración y discusión

- a) En el cilindro I, ¿qué relación hay entre su altura y la del rectángulo? \_\_\_\_\_
- b) En ese mismo cilindro, ¿qué relación hay entre la circunferencia de su base y las dimensiones del rectángulo? \_\_\_\_\_  
¿Cuánto mide el radio de la base del cilindro? \_\_\_\_\_
- c) En el cilindro II, ¿qué relación hay entre su altura y la del rectángulo? \_\_\_\_\_
- d) En ese cilindro, ¿qué relación hay entre la circunferencia de su base y las dimensiones del rectángulo? \_\_\_\_\_  
¿Cuánto mide el radio de la base del cilindro? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuál de los dos cilindros tiene mayor superficie total? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_



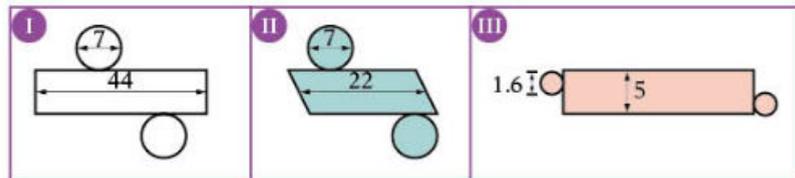
- f) Compara tus respuestas con las de un compañero. Expongan las razones en que las sustentan para llegar a un acuerdo.



Con la ayuda de su profesor, discutan en el grupo las conclusiones obtenidas por los equipos. Anoten en sus cuadernos los acuerdos que se tomaron en el grupo.

Actividades adicionales

1. Analiza las siguientes figuras:



Los tres diseños parecen desarrollos planos de cilindros de revolución. ¿Cuál o cuáles lo son?

¿En qué razones basas tu respuesta?

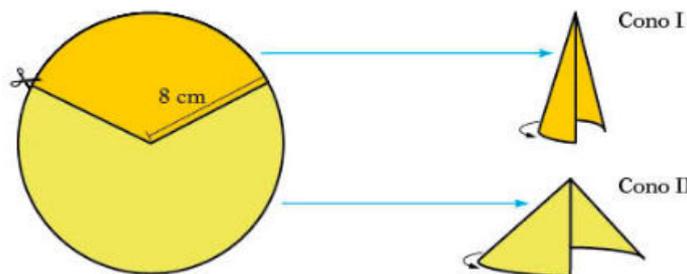


Discute tus respuestas con un compañero.

2. Diseñen en su cuaderno el desarrollo plano de cada uno de los siguientes cilindros de revolución.

Datos	Cilindro I	Cilindro II
Altura del cilindro (en cm)	10	3
Radio de la base (en cm)	1.5	2.5

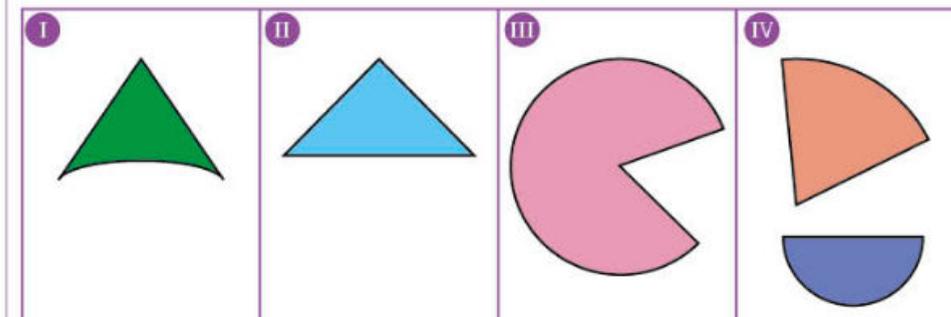
3. En un trozo de cartulina, dibujen un círculo de 8 cm de radio; recórtelo en dos sectores circulares como se indica en las siguientes figuras. Formen un cono con cada sector circular.



a) ¿Cuál de los dos conos tiene mayor base circular?  
¿Por qué?

b) ¿Cuál de los dos conos es más alto?  
¿Por qué?

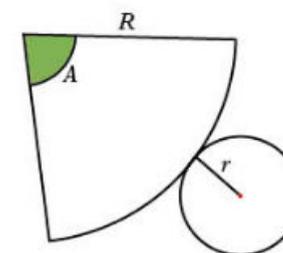
4. Calquen las siguientes figuras y luego recórtelas.



Unan los bordes de dos segmentos de cada figura y luego respondan las siguientes preguntas:

- a) ¿Con cuáles de las cuatro formas pueden formarse conos?
- b) ¿Qué les faltaría para completar el desarrollo plano del cono?
- c) ¿De qué se compone el desarrollo plano de un cono?

5. La siguiente figura representa el desarrollo plano de un cono. La literal  $R$  representa la generatriz del cono;  $r$ , el radio de la base, y  $A$ , el ángulo del sector circular.



- a) La generatriz  $R$  de un cono mide 6 cm, y el radio  $r$  de la base, 2 cm. ¿Cómo se calcula la medida del ángulo del sector circular de su desarrollo plano?
- b) ¿Cuál es la medida de ese ángulo?
- c) Tracen el desarrollo plano de ese cono.

6. El radio de la base de un cono mide 3 cm, y su altura, 5 cm.

- a) ¿Cómo se calcula la generatriz de ese cono?
- b) ¿Cuánto mide esa generatriz?
- c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector circular del desarrollo plano de ese cono?
- d) Tracen el desarrollo plano de ese cono.



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo los desarrollos planos obtenidos por los equipos y expliquen cómo calcularon las medidas que hacían falta en cada caso. Anoten en sus cuadernos las conclusiones a que llegó el grupo.

Usemos las TIC

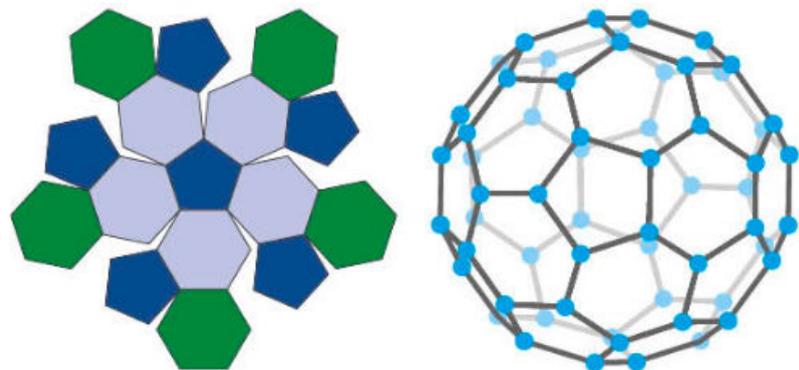
• Observa los videos "Los sólidos de revolución" y "Cilindros y conos" para conocer los desarrollos planos de esos cuerpos geométricos:

- <http://ventana.televiseducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/5/1796>
- <http://ventana.televiseducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/5/1797>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

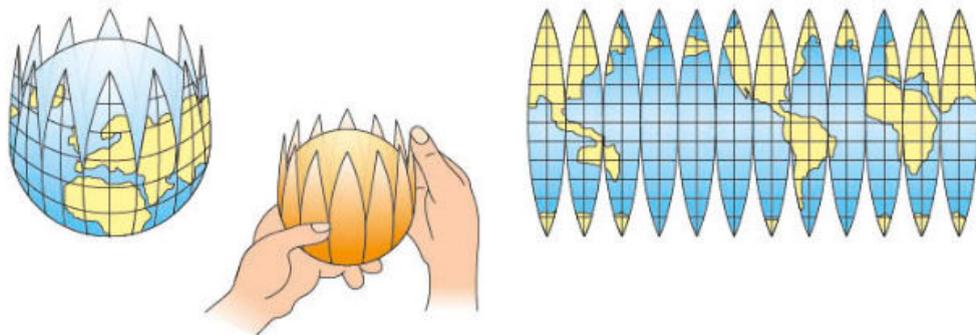
7. Trata de curvar un trozo de cartulina de modo que puedas formar una esfera.

- a) ¿Habrá alguna manera de que puedas hacerlo? ¿Puedes obtener el desarrollo plano de la esfera?
- b) Un balón de fútbol se elabora con piezas de cuero yuxtapuestas que tienen la forma de pentágonos y hexágonos regulares. La disposición de estas piezas coincide con la que tiene la estructura molecular de un compuesto químico conocido como fullereno, que se muestra enseguida:



¿Forma este conjunto de piezas un desarrollo plano de la esfera? ¿A qué se debe que el arreglo de figuras geométricas con que se fabrica un balón adquiere forma esférica?

- c) Los cartógrafos han creado una diversidad de representaciones de la superficie esférica terrestre sobre un plano. Una de ellas consiste en dividirla en secciones, como hacemos al pelar una naranja.



Pela una naranja en gajos, como se indica en la figura, y coloca un gajo sobre la mesa. ¿Su superficie es plana o curva?

¿La representación anterior es un desarrollo plano de la esfera?

- d) ¿A qué crees que se deba la imposibilidad de obtener un desarrollo plano de la esfera? Comenta tu respuesta con un compañero, y después con el grupo.

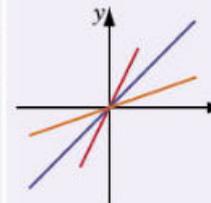


Para la siguiente sesión requieres traer transportador.

# Contenido 23

## Relación entre la pendiente de una recta y la razón tangente

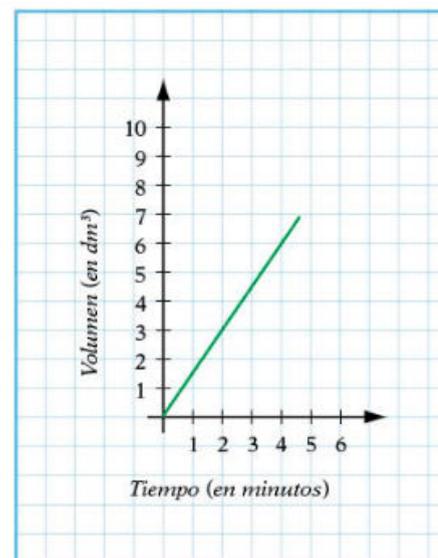
Supón que una recta gira en torno del origen del plano cartesiano. En el momento en que forma un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la dirección positiva del eje horizontal, ¿cuál es el valor de la pendiente de esta recta? Y si la recta continúa girando (o cayendo), de modo que forme con el eje horizontal ángulos de menos de  $45^\circ$ , ¿qué valores va adquiriendo la pendiente? Y si, al revés, los ángulos que se forman son de más de  $45^\circ$ , ¿qué valores adquiere la pendiente?



### 23.1. La razón tangente

#### Problema inicial

Un recipiente se está llenando de agua. La gráfica muestra la manera en que aumenta el volumen del líquido conforme transcurre el tiempo de llenado.



Por cada minuto transcurrido, ¿cuántos decímetros cúbicos aumenta el volumen de agua en el recipiente?

¿Qué relación hay entre el valor de la pendiente de la recta y el valor del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje  $x$ ?

#### Exploración y discusión

- a) De acuerdo con la gráfica, al empezar el proceso de llenado, ¿el recipiente estaba vacío? ¿En qué razones basas tu respuesta?
- b) Si la capacidad del recipiente es de  $9 \text{ dm}^3$ , ¿cuánto tarda en llenarse el recipiente?
- c) Cada vez que transcurren 2 minutos, ¿en cuántos decímetros cúbicos aumenta su volumen de agua?
- d) La representación algebraica de esta gráfica es  $y = 1.5x$ , en la que el valor 1.5 representa la pendiente de la recta. ¿Cómo se obtiene ese valor?



e) Si la representación algebraica de la gráfica fuera  $y = 0.5x$ , y la capacidad del recipiente fuera la misma ( $9 \text{ dm}^3$ ), ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse?

Discute tu respuesta con un compañero y explica las razones en la sustentas.

f) ¿Cómo sería la gráfica de esta situación? Trácela en el mismo plano que el de la gráfica  $y = 1.5x$ .

g) Comparen los ángulos que forman las dos rectas con la dirección positiva del eje  $x$ . ¿En cuál de las dos rectas el ángulo es mayor? ¿Por qué?

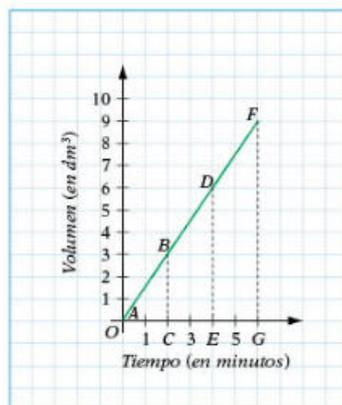


Con la ayuda de su profesor, presenten las respuestas que dieron los equipos a las preguntas, explicando en cada caso sus argumentos. Anoten en su cuaderno las conclusiones a que se llegue en el grupo. Contesten además lo siguiente:

- Si la representación algebraica de la función fuera  $y = x$ , ¿cuánto mediría el ángulo que forma la gráfica con la dirección positiva del eje  $x$ ?
- ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el recipiente de  $9 \text{ dm}^3$  de capacidad?

**Actividades adicionales**

1. Analiza la siguiente gráfica, en la que se han formado tres triángulos rectángulos trazando paralelas al eje  $y$ .



- ¿Son semejantes los triángulos rectángulos  $BAC$ ,  $DAE$  y  $FAG$ ? ¿Qué criterio de semejanza permite asegurarlo?
- ¿Cuáles son el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo agudo  $BAC$  del triángulo rectángulo  $BAC$ ? ¿Cuánto mide cada uno de estos catetos?
- Calcula el valor de la razón  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$  del ángulo  $BAC$ . ¿Cuál es?

En un triángulo rectángulo, a la razón  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$  de uno de sus ángulos agudos se le llama *tangente* de ese ángulo.

d) Calcula el valor de la tangente de los ángulos agudos  $DAE$  y  $FAG$  de los otros triángulos y registra los resultados en la siguiente tabla.

Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	Valor de la tangente (en decimal)
BAC				
DAE				
FAG				



e) ¿Qué relación hay entre el valor de la tangente de estos tres ángulos agudos? Discute tus respuestas con un compañero justificándolas con argumentos.

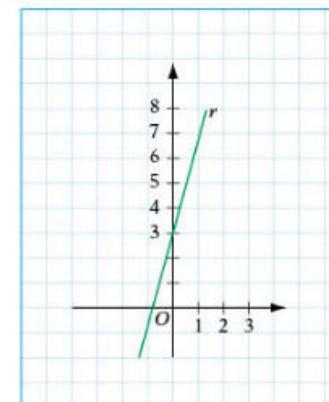
f) ¿Qué relación hay entre el valor de la tangente de estos ángulos y el de la pendiente de la recta?



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo sus conclusiones sobre las dos últimas preguntas y anoten en sus cuadernos las conclusiones a que lleguen en el grupo.



2. Analicen la siguiente gráfica.



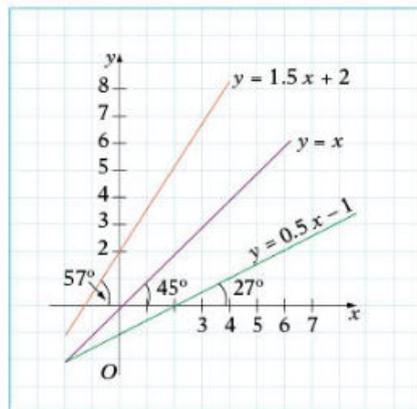
- Usen un transportador para medir el ángulo que forma la recta  $r$  con la dirección positiva del eje  $x$ . ¿Cuánto mide?
- Consideren la recta  $r$  y el eje  $x$  para completar un triángulo rectángulo y obtener el valor de la tangente del ángulo que acaban de medir. Luego, completen la siguiente tabla.

Medida del ángulo	Tangente del ángulo	Pendiente de la recta	Punto donde la recta corta al eje $y$	Expresión algebraica de la recta

- En el mismo plano, tracen la recta  $t$ , cuya expresión algebraica es  $y = x + 1$ .
- ¿Cuánto mide el ángulo que forma la recta  $t$  con la dirección positiva del eje  $x$ ?
- ¿Cuál es el valor de la tangente de ese ángulo?



3. Analicen las siguientes gráficas.



a) Consideren las rectas para formar tres triángulos rectángulos, uno para cada ángulo. Luego, completen la siguiente tabla.

Medida del ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Tangente del ángulo	Pendiente de la recta
57°				
45°				
27°				

b) Comparen los valores de la tangente con las medidas de los ángulos agudos a que corresponden. ¿De qué manera varía el valor de la tangente conforme aumenta la medida del ángulo agudo del triángulo rectángulo a que corresponde?

c) Comparen sus respuestas con las de otro equipo. ¿En ambos equipos coinciden los datos que anotaron en las tres columnas centrales de la tabla? Si esos datos son correctos, aunque no coincidan, ¿afectarán los valores de las pendientes de las rectas? ¿Por qué?



Coordinados por su profesor, los equipos presenten sus respuestas a las cuestiones planteadas para ser discutidas en el grupo. Contesten además lo siguiente:

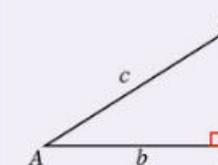
- ¿Qué relación hay entre el valor de la pendiente de una recta y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje x?
- Si desde un punto P cualquiera de la recta se traza una paralela al eje y de modo que corte al eje x en el punto Q, se forma un triángulo rectángulo POQ. ¿Qué relación hay entre el valor de la pendiente de esa recta y el valor de la tangente del ángulo O?

Redacten sus conclusiones y anótenlas en su cuaderno.

Para la siguiente sesión requieres traer transportador.

## Razones trigonométricas

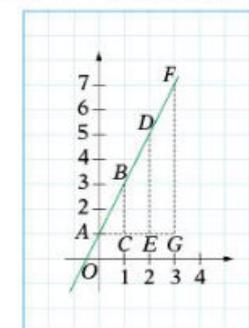
Si se asigna la letra  $c$  a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, la letra  $a$  al cateto opuesto al ángulo agudo  $A$  y la letra  $b$  al lado adyacente al ángulo agudo  $A$ , pueden establecerse seis cocientes con los valores de sus medidas:  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{b}{a}$  son dos de ellos. ¿Cuáles son los cuatro restantes? ¿De qué dependen los valores de estos cocientes? ¿En qué caso, el valor del cociente  $\frac{a}{c}$  es igual a 0.5? ¿Y en qué caso, el valor de  $\frac{b}{c}$  es también igual a 0.5?



### 24.1. Las razones seno, coseno y tangente

#### Problema inicial

En la gráfica de la recta  $y = 2x + 1$  se han formado algunos triángulos rectángulos.



- ¿Qué relación hay entre esos triángulos rectángulos?
- ¿Cuál es el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa del triángulo BAC? ¿Y el del cateto adyacente entre la hipotenusa?
- Supón que calculas estos mismos cocientes en los otros triángulos, ¿serán diferentes o iguales a los del triángulo BAC?

#### Exploración y discusión

- a) ¿Cuánto mide el ángulo BAC? Comproba con el transportador.
- b) Con el teorema de Pitágoras, calcula la medida hasta milésimas de la hipotenusa de los triángulos BAC, DAE y FAG. Luego, registra en la siguiente tabla las medidas de los lados de los triángulos. Compara tus resultados con los de un compañero. En caso de que no coincidan, hagan las correcciones pertinentes.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa
BAC			
DAE			
FAG			



c) Calculen los cocientes indicados y registrenlos en la tabla. Pueden usar una calculadora.

Triángulo	Medida del ángulo A	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Cateto opuesto / Hipotenusa	Cateto adyacente / Hipotenusa
BAC						
DAE						
FAG						

d) Comparen los cocientes obtenidos para cada triángulo. ¿Son iguales o diferentes? ¿A qué atribuyen este hecho?

En un triángulo rectángulo, para un ángulo agudo A, las razones indicadas en la tabla reciben nombres especiales:

- A la razón  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$  se le llama *seno del ángulo A*.
- A la razón  $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$  se le llama *coseno del ángulo A*.

e) Usen una calculadora científica (o la tabla de razones trigonométricas que aparece al final del libro) para obtener los valores del seno y coseno del ángulo A. ¿Coinciden esos valores con los que ustedes obtuvieron? ¿Por qué?



Con la ayuda de su profesor, los equipos discutan en el grupo sus respuestas. Anoten en su cuaderno sus conclusiones. Analicen nuevamente la figura del problema inicial para contestar lo siguiente:

- ¿Es posible que el valor del seno de un ángulo agudo A sea igual o mayor que 1? ¿Por qué?
- ¿Es posible que el valor del coseno de un ángulo agudo A sea igual o mayor que 1? ¿Por qué?

**Actividades adicionales**



1. Trabaja con un compañero. Usen una calculadora científica (o la tabla de razones trigonométricas que aparece al final del libro) para completar la siguiente tabla. Redondeen a tres cifras decimales.



A	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
sen A	0.174							0.985
cos A	0.985							0.174
tan A	0.176							

a) En la tabla anterior se observa la siguiente relación entre el seno y el coseno.

$$\text{sen } 10^\circ = \text{cos } (90^\circ - 10^\circ) \text{ y } \text{cos } 10^\circ = \text{sen } (90^\circ - 10^\circ)$$

¿Esta relación se cumplirá para los demás valores del ángulo A?; dicho de otra manera: ¿será  $\text{sen } A = \text{cos } (90^\circ - A)$  y  $\text{cos } A = \text{sen } (90^\circ - A)$ ? Utilicen la información que proporciona la tabla para completar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{sen } 20 &= \text{cos } \_\_\_\_\_\_ & \text{sen } 70 &= \text{cos } \_\_\_\_\_\_ & \text{cos } 30 &= \text{sen } \_\_\_\_\_\_ \\ \text{cos } 50 &= \text{sen } \_\_\_\_\_\_ & \text{sen } A &= \text{cos } \_\_\_\_\_\_ & \text{cos } A &= \text{sen } \_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

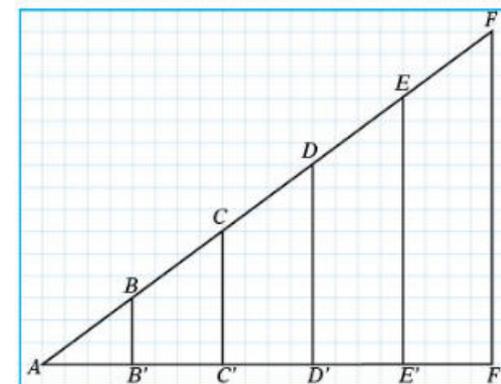
b) Expresen por escrito esta relación entre el seno y el coseno de un ángulo.



Con la ayuda de su profesor, discutan en el grupo las conclusiones de los equipos. Registren en sus cuadernos las conclusiones que se obtengan en el grupo.



2. Apliquen el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos que muestra la siguiente figura. (Consideren el lado de cada cuadrado como unidad.)



- En el  $\triangle ABB'$ , la longitud de la hipotenusa es: \_\_\_\_\_
- En el  $\triangle ACC'$ , la longitud de la hipotenusa es: \_\_\_\_\_
- En el  $\triangle ADD'$ , la longitud de la hipotenusa es: \_\_\_\_\_
- En el  $\triangle AEE'$ , la longitud de la hipotenusa es: \_\_\_\_\_
- En el  $\triangle AFF'$ , la longitud de la hipotenusa es: \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera va aumentando la medida de la hipotenusa? ¿Por qué?



Coordinados por su profesor, discutan en el grupo los resultados obtenidos por los equipos y juntos elaboren las conclusiones del grupo.



• Observa el video "Seno, coseno y tangente" para estudiar esas razones trigonométricas:

– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/1789>

• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar las razones trigonométricas:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-triangulos-rectangulos-y-trigonometria>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)



3. Utilicen la figura anterior para calcular el valor de las siguientes razones del ángulo A:

- a) En el  $\triangle ABB'$ ,  $\text{sen } A =$  \_\_\_\_\_
- b) En el  $\triangle ACC'$ ,  $\text{sen } A =$  \_\_\_\_\_
- c) En el  $\triangle ABB'$ ,  $\text{cos } A =$  \_\_\_\_\_
- d) En el  $\triangle ADD'$ ,  $\text{cos } A =$  \_\_\_\_\_
- e) En el  $\triangle ABB'$ ,  $\text{tan } A =$  \_\_\_\_\_
- f) En el  $\triangle AFF'$ ,  $\text{tan } A =$  \_\_\_\_\_
- g) ¿En alguno de estos triángulos el valor de  $\text{sen } A$  es diferente? \_\_\_\_\_ ¿Y el de  $\text{cos } A$ ? \_\_\_\_\_ ¿Y el de  $\text{tan } A$ ? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_



Apoyados por su profesor, discutan en el grupo las respuestas de los equipos para establecer acuerdos. Luego, registren éstos en sus cuadernos.



4. En cada caso, utilicen los datos que se dan para hallar el valor de x.

<p>a) <math>\text{sen } A = \frac{3}{5}</math></p> <p><math>x =</math> _____</p>	<p>b) <math>\text{cos } B = \frac{1}{2}</math></p> <p><math>x =</math> _____</p>	<p>c) <math>\text{tan } A = \frac{3}{4}</math></p> <p><math>x =</math> _____</p>
--	--	--

5. Auxiliense con un diagrama para contestar las siguientes cuestiones:

<p>a) En un triángulo rectángulo, <math>\text{sen } A = \frac{7}{25}</math> y <math>\text{cos } A = \frac{24}{25}</math>. ¿Cuál es el valor de <math>\text{tan } A</math>?</p>	
<p>b) En un triángulo rectángulo, la tangente de un ángulo agudo es <math>\frac{9}{40}</math>. ¿Cuál es el valor de la tangente del otro ángulo agudo?</p>	
<p>c) En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo es <math>\frac{15}{17}</math>. ¿Cuál es el valor del coseno del otro ángulo agudo?</p>	



Coordinados por su profesor, elaboren en el grupo una lista de los conceptos sobre las razones trigonométricas que, en su opinión, son los más importantes.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Medir alturas de modo indirecto

Utilicen calculadora, hojas y lápiz (o, si es posible, un programa de hoja electrónica) para elaborar una tabla con valores de las razones trigonométricas seno, coseno, tangente y cotangente, redondeados hasta diezmilésimos.

Para la siguiente sesión requieres traer escuadra, regla y transportador.

# Contenido 25

## Uso de las razones trigonométricas

Si se desea medir la altura de un árbol de regular tamaño, sabiendo que la sombra que proyecta mide 10 metros, ¿cómo usar este dato para averiguarlo?

**Te recomendamos la lectura**

“Seno y tangente de un ángulo” y otros temas, en Hernández Garciadiego, C., *La geometría en el deporte*, México, Santillana, 2002.

### 25.1. Cálculo de un lado de un triángulo rectángulo

#### Problema inicial

Un tren transita por un tramo recto de una colina que tiene un ángulo de subida de  $27^\circ$ . ¿Qué distancia recorre el tren cuando sube 100 m? \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión



- a) En el siguiente recuadro, traza un croquis a escala de esta situación con una escuadra, una regla graduada y un transportador. ¿Qué tipo de triángulo debes trazar? \_\_\_\_\_ ¿Qué escala podría ser adecuada? \_\_\_\_\_ Discute tu respuesta con un compañero, de manera que lleguen a un acuerdo.

- b) ¿La distancia que recorre el tren puede ser menor que 100 m? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- c) Los datos de que disponen en este problema son: la medida de un ángulo y la del cateto opuesto a ese ángulo; desean conocer la medida de la hipotenusa. ¿Qué razón trigonométrica relaciona estos elementos del triángulo rectángulo? \_\_\_\_\_

¿Qué distancia recorre el tren cuando sube 100 m? \_\_\_\_\_  
 ¿Qué razón trigonométrica deben usar si, en vez de la hipotenusa, desearan conocer la medida del cateto adyacente al ángulo de  $27^\circ$ ? \_\_\_\_\_ Calculen esa medida. \_\_\_\_\_



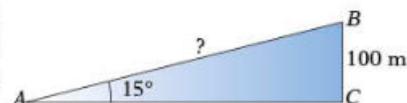
Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas y los procedimientos que utilizaron para hallarlas. Registren en sus cuadernos las conclusiones que acordaron en el grupo.

Actividades adicionales



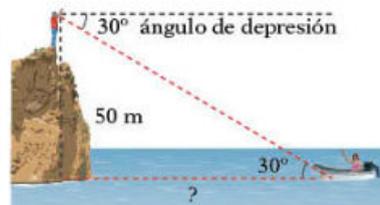
Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

- Supongan que el ángulo de subida de la vía del tren a que se refiere el problema inicial era de  $15^\circ$ . ¿Qué distancia  $AB$  recorre el tren cuando sube 100 m?



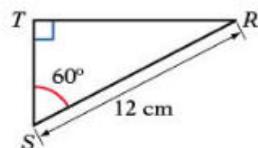
- ¿En cuál de los dos casos es mayor la distancia  $\overline{AB}$ : cuando el ángulo de subida de la vía del tren es de  $27^\circ$  o cuando es de  $15^\circ$ ?
- ¿Por qué es mayor esa distancia? ¿Qué explicación pueden dar a este hecho? Presenten su explicación en el grupo con ayuda de imágenes.

- Desde lo alto de un acantilado, Luis saluda a Carmen, quien se encuentra en una lancha. El ángulo de depresión con que Luis ve a Carmen es de  $30^\circ$  y la distancia del nivel del agua a los ojos de Luis es de 50 m. ¿A qué distancia de la orilla está la lancha?

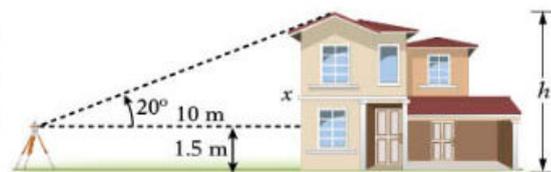


- ¿De qué datos disponen en este problema? ¿Qué razón trigonométrica relaciona estos elementos del triángulo rectángulo?
- La distancia de la lancha a la orilla es mayor o menor que 50 m? ¿En qué argumento basan su respuesta?

- Calculen el área del triángulo rectángulo  $STR$ .
- Calculen el perímetro del mismo triángulo.

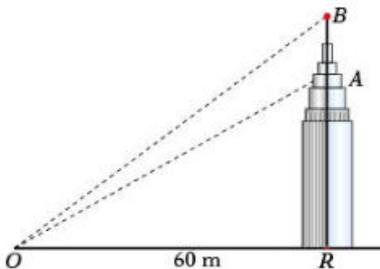


- A una distancia de 10 m de una casa se ha colocado un teodolito a una altura de 1.5 m. Se observa que el ángulo de elevación de la parte más alta de la casa es de  $21^\circ$ . ¿Cuál es la altura de la casa?



- Calculen la altura  $AB$  de una torre de televisión situada en la cima de un edificio, con base en los siguientes datos:

$\overline{OR} = 60 \text{ m}$      $\angle BOR = 43^\circ$      $\angle AOR = 38^\circ$



Glosario

**Teodolito.** Instrumento de precisión utilizado en topografía, compuesto de un círculo horizontal y un semicírculo vertical, ambos graduados y provistos de anteojos, para medir ángulos en sus planos respectivos.

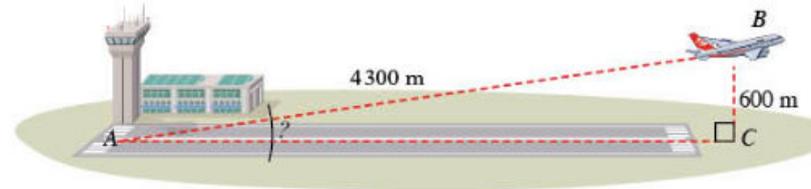


Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos realizados en su equipo. Expliquen, además, de qué depende la elección de la razón trigonométrica que resuelve un problema. Registren en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.

25.2. Cálculo de un ángulo de un triángulo rectángulo

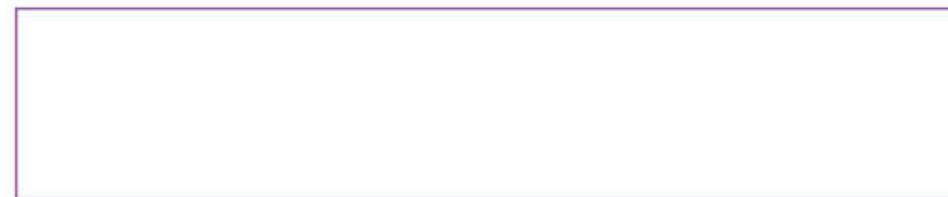
Problema inicial

Un avión despegue de la pista en línea recta. Cuando ha recorrido 4300 m, alcanza una altura de 600 m. ¿Con qué ángulo de elevación inicia el vuelo?



Exploración y discusión

- Para tener una idea de la medida del ángulo, en el siguiente recuadro puedes dibujar a escala la situación y medir con un transportador el ángulo con que el avión inicia el despegue. ¿Qué escala convendría aplicar?



- ¿Qué razón trigonométrica relaciona el ángulo agudo que deseamos conocer, con los datos que se dan?



- ¿Con qué ángulo de elevación inicia el vuelo el avión? Discute y argumenta tu respuesta con un compañero. Si sus respuestas no coinciden, revisen su trabajo para llegar a un acuerdo.

- ¿Qué razón trigonométrica utilizarían si, en vez de la medida del ángulo  $A$ , se quiere conocer la del ángulo  $B$ ?

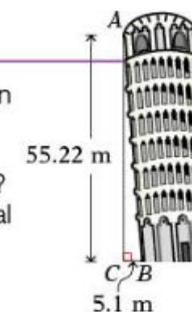


Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten sus respuestas en el grupo. Anoten en sus cuadernos las conclusiones obtenidas.

Actividades adicionales

- La famosa torre de Pisa tiene una altura de 55.22 m. Cuando los rayos del sol caen perpendicularmente, la torre proyecta una sombra de 5.1 m.

- ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de la torre con respecto al suelo ( $\angle ABC$ )?
- ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la cima de la torre con respecto a la vertical ( $\angle BAC$ )?
- ¿Cuál es la longitud  $AB$  de la torre?

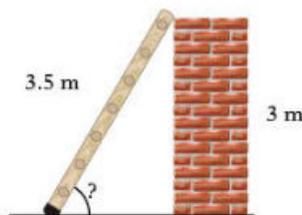


- Analiza la figura. ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo  $ABC$ ? ¿De qué datos dispones en este problema para calcular la medida del ángulo  $ABC$  (que llamaremos  $\angle B$ )? ¿Qué razón trigonométrica relaciona a este ángulo con los lados conocidos?
- ¿De qué datos dispones para calcular la medida del ángulo  $BAC$  (que llamaremos  $\angle A$ )? ¿Qué razón trigonométrica relaciona este ángulo con los datos conocidos?
- Si conoces la medida del  $\angle B$ , ¿de qué otra manera puedes calcular la medida del  $\angle A$ ?
- En el triángulo  $ABC$ , el lado  $AB$  es su hipotenusa. ¿Entre qué valores se encuentra esta longitud? ¿Podría ser menor que  $55.22$  m? ¿Podría ser mayor que  $55.22$  m +  $5.1$  m?
- ¿Puedes aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa  $AB$ ?

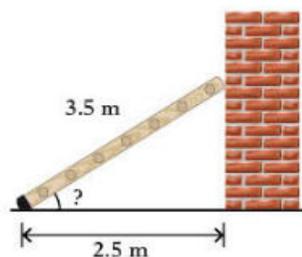


Apoiados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo sus respuestas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

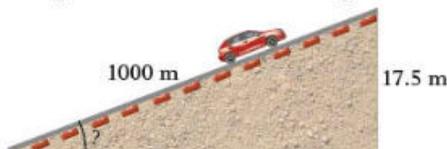
- Si quieres colocar una escalera de  $3.5$  m de longitud sobre un muro de  $3$  m de altura, de modo que la parte superior de la escalera y del muro coincidan, ¿qué ángulo debe formar la escalera con el piso?



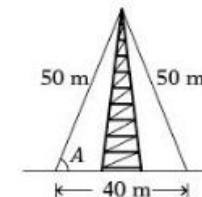
- En el problema anterior, si quisieras apoyar la escalera sobre el muro, de manera que la base de la escalera esté a  $2.5$  m de la base del muro, ¿qué ángulo formaría la escalera con el piso?



- Un automóvil transita por un tramo recto de carretera. Cuando el vehículo recorre  $1000$  m, sube  $17.5$  m. Calcula la medida del ángulo de subida en ese tramo de carretera. (Nota: Las longitudes mostradas en la figura no están a la misma escala.)



- La figura representa una torre de televisión y dos cables de soporte. Halla la medida del ángulo  $A$ .



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten en el grupo los procedimientos y cálculos realizados en la resolución de estos problemas. Registren en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.



- Reúnete con dos compañeros para realizar algunas mediciones indirectas. Midan, por ejemplo, la altura de su escuela, la de la astabandera, la de su casa o del edificio donde viven. Para realizar esas mediciones, construyan un goniómetro de acuerdo con las instrucciones que se presentan a continuación. Expongan sus resultados en el grupo, apoyados por su profesor.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Medir alturas de modo indirecto

Construyan un goniómetro. Seleccionen los edificios, árboles, torres y casas cuyas alturas medirán con ayuda del goniómetro que construyeron y una cinta métrica. Realicen la medición y registren los resultados.

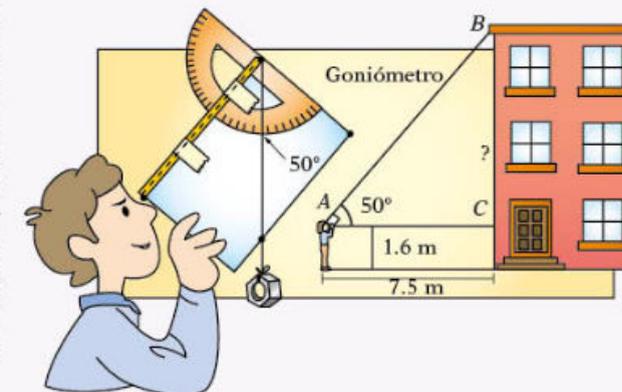
*Construcción y uso del goniómetro para realizar mediciones indirectas*

Un *goniómetro* es un instrumento que se utiliza para medir ángulos. Para construirlo se requiere: un trozo de cartulina, un transportador, un trozo de hilo, un popote, una tuerca o una piedrecilla, y cinta adhesiva.

Los objetos se colocan como se muestra en la figura y se sujetan con la cinta adhesiva.

La figura también muestra la forma en que se usa el goniómetro para medir el ángulo de elevación con que se observa la parte alta de un edificio.

Con el goniómetro, una cinta métrica y unas tablas trigonométricas (o calculadora científica), puedes medir de modo indirecto la altura de edificios, monumentos, árboles u otros objetos, en los que una medición directa sería difícil de llevar a cabo. La figura nos ayudará a estudiar la manera de realizar esta tarea. Para medir la altura del edificio, un niño se retiró de él a una distancia tal que le permitiera medir el ángulo de elevación. Midió esa distancia ( $7.5$  m) con la cinta métrica y el ángulo de elevación ( $50^\circ$ ) con el goniómetro. Luego efectuó los siguientes cálculos:



$$\begin{aligned} \tan \angle A &= \frac{BC}{AC} \\ \tan 50^\circ &= \frac{BC}{7.5} \\ BC &= 7.5 \times (\tan 50^\circ) \\ BC &= 7.5 \times (1.1918) \\ BC &= 8.94 \end{aligned}$$

Para determinar la altura del edificio, debemos sumar la longitud  $BC$  a la altura del niño:

$$\text{Altura del edificio} = 8.94 \text{ m} + 1.6 \text{ m} = 10.54 \text{ m}$$

*Usemos las TIC*



- Observa el video "Aplicación de las razones trigonométricas" para conocer algunas aplicaciones de las razones trigonométricas:

– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/1790>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

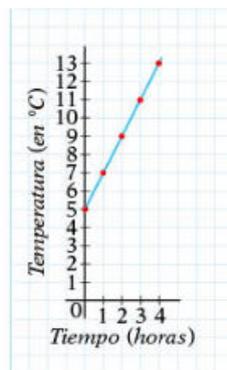
## Razón de cambio

Si nos interesa saber la rapidez con que se desplaza un vehículo o se vacía una alberca, ¿qué magnitudes tendríamos que considerar en cada caso?

### 26.1. ¿Cómo cambian las cosas?

#### Problema inicial

La siguiente gráfica representa las temperaturas que se registraron en una población, a partir de un momento en que la temperatura era de 5 °C



¿De qué manera cambió la temperatura cada hora en el periodo de tiempo en que se hizo el registro? \_\_\_\_\_ ¿De qué otras maneras puede representarse esta situación? \_\_\_\_\_

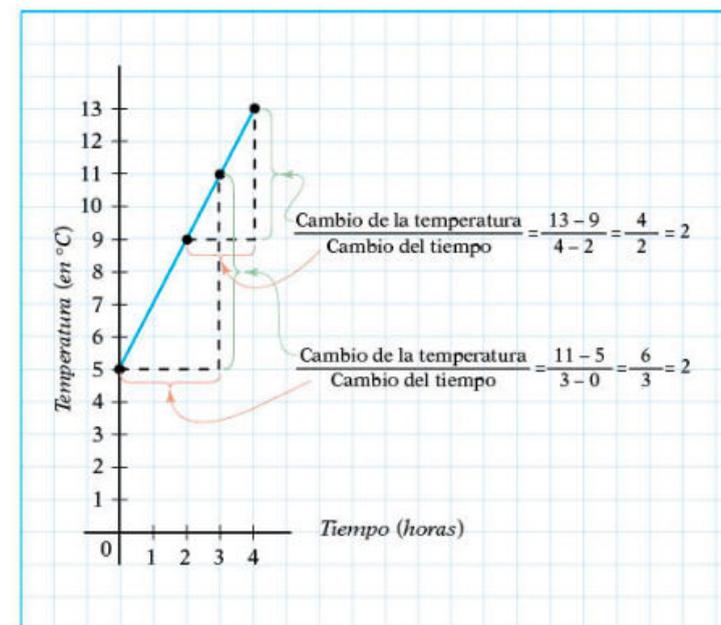
#### Exploración y discusión

- De acuerdo con esta gráfica, el registro de la temperatura ( $T$ ) se empezó a llevar a cabo cuando ésta era de 5 °C. ¿Qué valor se le asigna a  $h$  (tiempo en horas) en ese momento?
- ¿Cuál era la temperatura una hora después de que empezó a hacerse el registro? ¿De qué manera cambió en ese lapso: aumentó o disminuyó? \_\_\_\_\_ ¿Qué tanto? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tanto cambió la temperatura entre la tercera y la segunda horas? \_\_\_\_\_ ¿Aumentó o disminuyó? \_\_\_\_\_
- ¿Durante cuánto tiempo se llevó a cabo el registro de la temperatura? \_\_\_\_\_ ¿Qué tanto cambió ésta? \_\_\_\_\_

- ¿Cuánto cambió la temperatura cada hora? \_\_\_\_\_ ¿Fue constante o variable ese cambio? \_\_\_\_\_
- El fenómeno que se dio en esa población se ha representado mediante una gráfica. También puede representarse en una tabla como la siguiente. Complétala.

Tiempo, $h$ (en horas)	0	1	2	3	4
Temperatura, $T$ (en °C)	5	7			

En el fenómeno que estamos analizando hay una relación funcional (*función*) entre los cambios de dos variables (o magnitudes): la temperatura y el tiempo.



$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Cambio de la temperatura}}{\text{Cambio del tiempo}}$$

Al cambio relativo de una de las variables con respecto de la otra se le llama *razón de cambio*. Por ejemplo, entre la cuarta y la tercera horas, la razón de cambio es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{13 - 11}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

La razón de cambio de estas variables es un aumento de 2 °C por hora.

- Si se mantiene la misma tendencia en la temperatura después de la cuarta hora, ¿qué cálculos habría que hacer para saber qué cambios de temperatura se tendrán entre la sexta y la quinta horas? \_\_\_\_\_



h) En la situación que estamos analizando, ¿hay algún periodo de tiempo en el que la razón de cambio de estas variables es diferente? Discute y argumenta tu respuesta con un compañero.

i) ¿Qué significaría el hecho de que la pendiente de la recta fuera diferente a partir de la cuarta hora?

j) ¿Qué significaría que, a partir de la cuarta hora, la gráfica de la situación no fuera una recta?



Con la ayuda de su profesor, espongan y argumenten en el grupo las respuestas que dieron los equipos. Expliquen, además, la relación que hay entre la razón de cambio de una función lineal y la inclinación (o pendiente) de la recta que representa. Registren en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.

**Actividades adicionales**

1. Analiza las siguientes tablas, en las que se relacionan valores del tiempo con los correspondientes valores de la temperatura de la situación con que empezamos esta lección. Complétalas.

Tabla A	
Tiempo, h (en horas)	Temperatura, T (en °C)
0.0	5
0.5	6
1.0	
1.5	
2.0	
2.5	

Tabla B	
Tiempo, h (en horas)	Temperatura, T (en °C)
0.00	5.00
0.25	5.50
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	

- a) Hemos visto que, en la situación que analizamos, la razón de cambio ha sido constante: la temperatura ha aumentado 2 °C cada hora. De acuerdo con esto, ¿cuánto aumenta la temperatura media hora después de haber empezado el registro? ¿Por qué?
- b) Según la tabla A, ¿cuál fue la temperatura en la población 2.5 horas después de haber empezado el registro de temperaturas?
- c) ¿Cuánto aumenta la temperatura un cuarto de hora después de haber empezado el registro? ¿Por qué?
- d) De acuerdo con la tabla B, ¿cuál es la temperatura de la población 1 hora y cuarto después de haber iniciado el registro de temperaturas? ¿Por qué?



e) Las tablas anteriores se ven diferentes entre sí y con respecto de la situación con que empezó esta lección. ¿Representan las tres la misma situación? Discútelo con un compañero exponiendo argumentos.

2. Las siguientes tablas se refieren a la situación planteada al inicio de la lección.

Tabla A	
Tiempo, h (en horas)	Temperatura, T (en °C)
0.0	
0.5	$5 + 0.5 \times 2 = 6$
1.0	
1.5	$5 + 1.5 \times 2 = 8$
2.0	
3.5	

Tabla B	
Tiempo, h (en horas)	Temperatura, T (en °C)
0.00	
0.25	$5 + 0.25 \times 2 = 5.5$
0.75	$5 + 0.75 \times 2 = 6.5$
1.50	

- a) Calculen la razón de cambio (cambio de la temperatura entre cambio del tiempo) con los dos datos que se dan en la tabla A.
- b) Hagan lo mismo con los datos que se dan en la tabla B.
- c) ¿Representan estas dos tablas la misma situación? ¿Por qué?
- d) Completen las tablas y tracen la gráfica que corresponde a cada una.

¿Son diferentes entre sí las gráficas o son iguales?  
 ¿Son diferentes entre sí las pendientes de estas gráficas?  
 ¿Por qué?



Con la ayuda de su profesor, espongan y argumenten en el grupo las respuestas que dieron los equipos. Registren en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.



• Observa los videos "Pendiente y razón de cambio" y "Ejemplos de razones de cambio significativas" para conocer su significado y determinar la razón de cambio de diferentes situaciones:

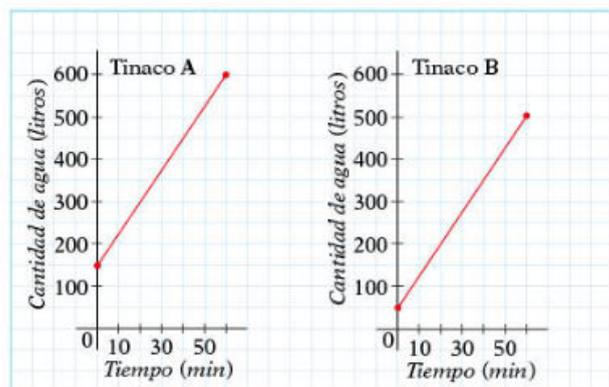
- <http://ventana.televisedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/1/1755>
- <http://ventana.televisedu.cativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/1/1756>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

## 26.2. Los fenómenos se comparan con razones

### Problema inicial

Las siguientes gráficas muestran la forma en que se van llenando dos tinacos de 600 litros de capacidad, al recibir agua de sus respectivas llaves de alimentación.

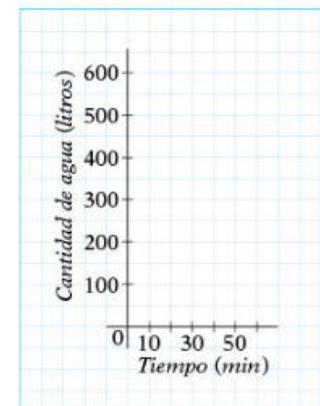


¿Cuántos litros de agua por minuto recibe cada tinaco? ¿Se llena uno antes que el otro? ¿Por qué?

### Exploración y discusión

- ¿Cuál era el volumen de agua del tinaco A al abrir la llave? ¿Cuál era su volumen 60 minutos después?
- ¿Cuántos litros de agua por minuto recibió el tinaco A? ¿Cuál es la razón de cambio de volumen de agua del tinaco A?
- ¿Cuál era el volumen de agua del tinaco B al abrir la llave? ¿Cuál era su volumen 60 minutos después?
- ¿Cuántos litros de agua por minuto recibió el tinaco B? ¿Cuál es la razón de cambio de volumen de agua del tinaco B?
- ¿Alguno de los dos tinacos recibió más agua por minuto que el otro? Compara las razones de cambio en el volumen de agua en los dos tinacos; ¿son iguales o diferentes entre sí? Discute con argumentos tus respuestas con un compañero.
- Analicen las gráficas anteriores. ¿Cuál es el valor de la pendiente de cada una de las rectas? ¿Son iguales o diferentes entre sí? ¿Qué relación encuentran entre el valor de la pendiente de las rectas y la razón de cambio en las magnitudes implicadas en esta situación?

- g) En el siguiente plano cartesiano, tracen las gráficas que muestren la manera en que se llenan ambos tinacos. Marquen las rectas con las etiquetas "Tinaco A" o "Tinaco B", según corresponda.



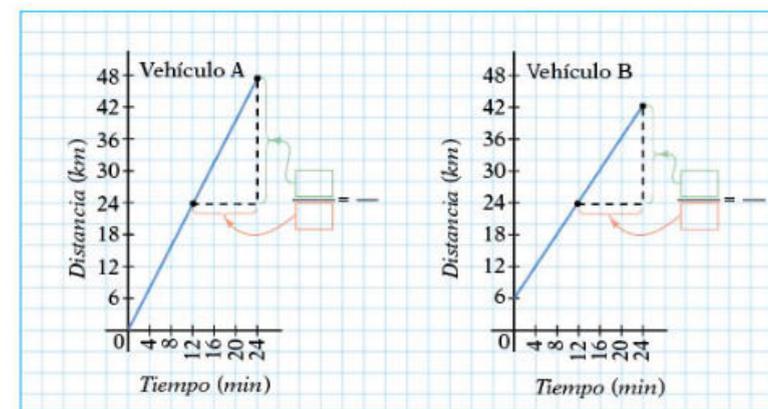
- h) La gráfica del llenado de agua de los dos tinacos son dos rectas paralelas. ¿Con qué aspecto de la situación real tiene que ver que las rectas sean paralelas?



Con la ayuda de su profesor, los equipos expongan y argumenten sus respuestas. Además, expliquen cómo habría sido el llenado de los dos tinacos, si su representación gráfica fueran dos rectas no paralelas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

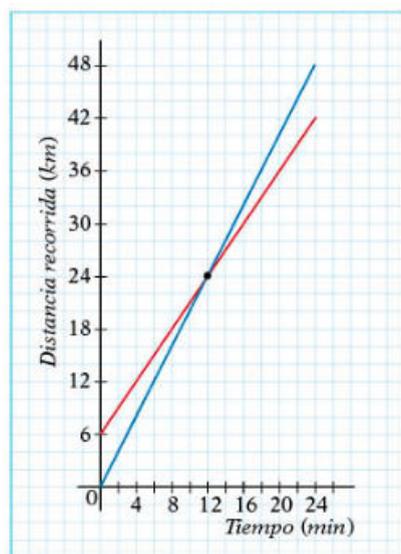
### Actividades adicionales

1. Las gráficas que aparecen a continuación muestran el movimiento de dos vehículos en una carretera recta.



- a) ¿Qué distancia había recorrido el vehículo A al empezar el registro de los movimientos de los dos vehículos? ¿Qué distancia recorrió en los primeros 15 minutos?

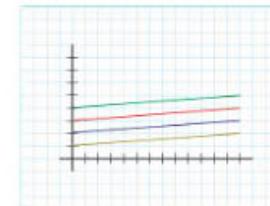
- b) ¿Cuántos kilómetros por minuto viajó el vehículo A? O, dicho de otra manera, ¿cuál es su velocidad por minuto? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la razón de cambio de posición en la carretera del vehículo A? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué distancia había recorrido el vehículo B al empezar el registro del movimiento de los dos vehículos? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos kilómetros más viajó después de 20 minutos? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuántos kilómetros por minuto viajó el vehículo B o cuál es su velocidad por minuto? \_\_\_\_\_
- f) ¿Son distintas las velocidades de los dos vehículos? \_\_\_\_\_  
¿Cuál de los dos viaja con mayor velocidad? \_\_\_\_\_
- g) La siguiente figura muestra, en un mismo plano cartesiano, la manera en que se desplazan ambos vehículos. Junto a cada recta, anota "Vehículo A" o "Vehículo B", según corresponda.



- h) ¿Cómo se distingue en la gráfica que un vehículo va a mayor velocidad que el otro? \_\_\_\_\_
- i) ¿Qué representa el punto de intersección de las dos rectas? \_\_\_\_\_
- j) ¿Qué significa el hecho de que la gráfica del movimiento de los dos vehículos, sean dos rectas que no son paralelas? \_\_\_\_\_

El fenómeno físico considerado en la actividad 1 es el movimiento en línea recta con velocidad constante, el cual es conocido como *movimiento rectilíneo uniforme*. Una de sus características es que a incrementos iguales en el tiempo, les corresponden incrementos iguales en la posición, sin importar qué tan pequeños sean los incrementos considerados.

2. Analiza la siguiente gráfica para contestar las preguntas que se plantean.



- a) ¿Qué representaría la gráfica si se refiriera al llenado de cuatro tinacos? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué representaría si se refiriera al movimiento de cuatro vehículos en una carretera recta? \_\_\_\_\_
- c) ¿Qué representaría si se refiriera al costo del viaje en taxi por kilómetro recorrido en cuatro ciudades diferentes? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué otra situación podría representar la gráfica anterior? \_\_\_\_\_



Discute tu respuesta con un compañero. Entre ambos elaboren una lista de situaciones para presentarla posteriormente en el grupo.

3. Analicen la gráfica de abajo para contestar las preguntas que se plantean.



- a) ¿Qué representaría la gráfica si se refiriera al llenado de cuatro tinacos? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué representaría si se refiriera al movimiento de cuatro vehículos en una carretera recta? \_\_\_\_\_
- c) ¿Qué representaría si se refiriera al costo del viaje en taxi por kilómetro recorrido en cuatro ciudades diferentes? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué otra situación podría representar la gráfica anterior? \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, expongan y argumenten sus respuestas en el grupo. Contesten además lo siguiente:

- Supongan ahora que la situación del problema inicial es al revés. Ambos tinacos están llenos y, al mismo tiempo, empiezan a desaguarse. Una de las llaves arroja más cantidad de agua que la otra. ¿Cómo sería la gráfica de esta situación?
- ¿Qué diferencia hay entre el valor de la razón de cambio en el problema inicial y en el de ésta?

Anoten en su cuaderno las conclusiones del grupo.

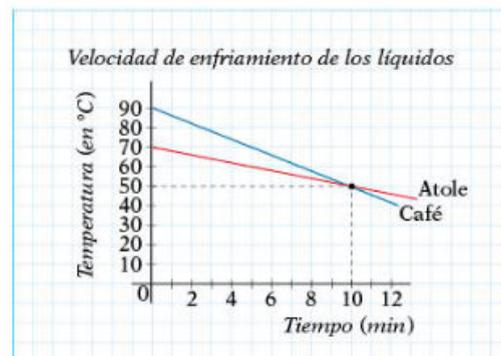
### 26.3. ¿Cuál de los dos cambia más rápidamente?

#### Problema inicial

Una taza de café y una de atole se calientan en un horno de microondas. Luego, se sacan del horno y se exponen a la temperatura ambiente, que es de 15 °C.

Supongamos que, en los primeros 12 minutos, las temperaturas de ambos líquidos disminuyen uniformemente conforme transcurre el tiempo.

La gráfica representa una aproximación de los cambios de temperatura de ambas tazas durante los primeros 12 minutos a partir del momento en que se sacaron del horno.



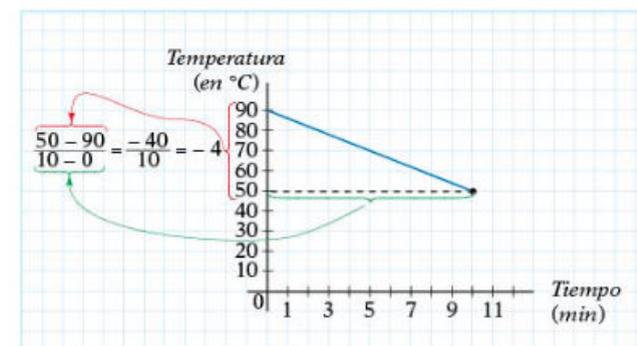
¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura (o velocidad de enfriamiento) de los dos líquidos? ¿Cuánto tiempo debió transcurrir para que el café y el atole tuvieran la misma temperatura?

#### Exploración y discusión

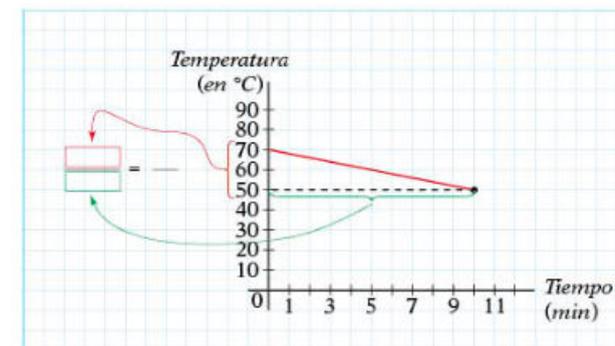
- ¿Qué temperatura alcanzó la taza de café en el horno de microondas?
- ¿Qué temperatura alcanzó el atole?
- ¿Cuál es la temperatura del café 10 minutos después de que se sacó del horno? ¿Cuál es la temperatura del atole en ese momento?
- ¿Cuántos grados por minuto disminuyó la temperatura del café?
- ¿Y cuántos la temperatura del atole?
- Reúnete con un compañero y juntos completen la siguiente tabla, que representa los cambios de las temperaturas del café y del atole.

Tiempo (en minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura del café (en °C)													
Temperatura del atole (en °C)													

- g) Para calcular la razón de cambio de la temperatura del café, se toman dos datos cualesquiera de la tabla o de la gráfica. Tomemos, por ejemplo, los que corresponden a las temperaturas del café a los 10 y a los 0 minutos; se realiza el cociente  $\frac{50 - 90}{10 - 0} = \frac{-40}{10} = -4$ . ¿Qué significa este resultado negativo en términos de la situación?



- h) ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura del atole? Escribanla en el recuadro de la gráfica. ¿También es negativa? ¿Por qué?



- En el caso de estas gráficas, ¿de qué manera se manifiesta que la razón de cambio de las temperaturas de los líquidos es negativa?
- ¿Cuánto tiempo trascurrió para que las temperaturas de los dos líquidos fueran iguales?
- ¿Cómo serían las gráficas de las temperaturas de estos líquidos, al calentarlos en un horno, suponiendo que en los primeros 60 segundos el aumento de las temperaturas de ambos líquidos fuera uniforme conforme transcurre ese tiempo?



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten en el grupo las respuestas que dieron los equipos a las cuestiones anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

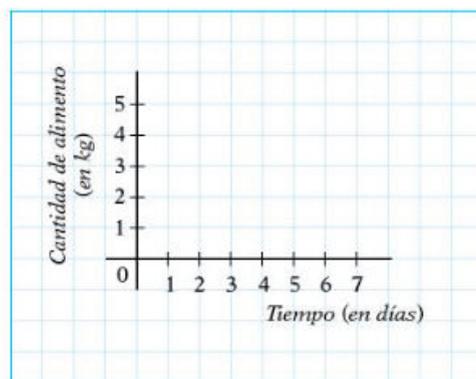
Actividades adicionales

1. Al empezar la semana, Alicia compró 5 kg de alimento para sus gallinas. Cada día les da  $\frac{2}{3}$  de kg de alimento.

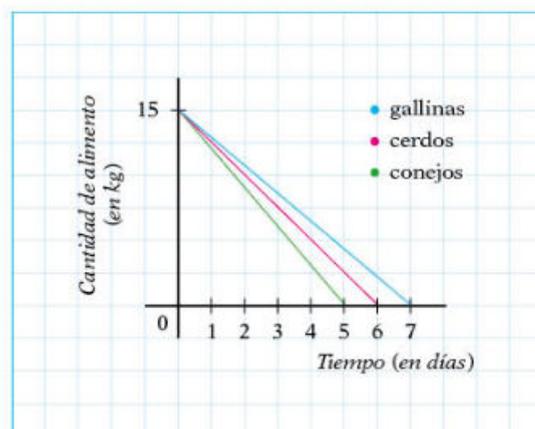
a) Completa la siguiente tabla, que representa los cambios en la cantidad de alimento conforme pasan los días.

Tiempo (en días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de alimento que le queda (en kg)								

- b) ¿Para cuántos días le alcanza el alimento?  
 c) ¿Cuál es la razón de cambio en la cantidad de alimento? ¿Es positiva o negativa esta razón de cambio?  
 d) Usa el siguiente plano cartesiano para trazar la gráfica de esta situación.

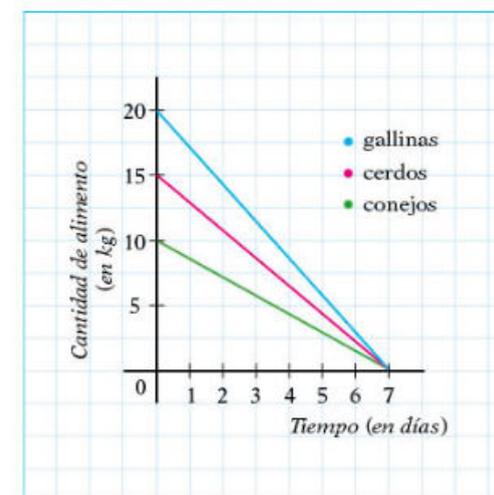


2. Tomás cría gallinas, cerdos y conejos. Al empezar la semana, compra alimentos distintos para los diferentes animales. En la siguiente gráfica se representa la cantidad que compra de cada tipo de alimento y cómo se consume cada uno. Analízala y contesta las preguntas que se plantean.



- a) ¿Qué cantidad de alimento compra Tomás por semana para cada tipo de animal?  
 b) ¿Qué cantidad de alimento por día consume cada tipo de animal?  
 c) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de alimento de cada tipo?  
 d) ¿Qué animales consumen más rápidamente su alimento? ¿De qué manera se percibe este hecho en la gráfica?

3. Pedro también cría gallinas, cerdos y conejos, y, al igual que Tomás, al empezar la semana compra alimentos distintos para sus animales. En la siguiente gráfica se representa la cantidad que compra de cada tipo de alimento y cómo se consume cada uno. Analízala y contesta las preguntas que se plantean.



- a) ¿Qué cantidad de alimento compra Pedro por semana para cada tipo de animal?  
 b) ¿Qué cantidad de alimento consume diariamente cada tipo de animal?  
 c) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de alimento de cada tipo?  
 d) ¿Qué animales consumen más rápidamente ese alimento? ¿De qué manera se percibe este hecho en la gráfica?



Apoyados por su profesor, discutan y argumenten en el grupo las respuestas que se dieron. Contesten además las siguientes preguntas:

- Supongan que el tiempo que tarda en llenarse de agua un tinaco es el mismo que tarda en vaciarse. ¿Cómo son las gráficas de llenado y de vaciado? Trácenlas en el pizarrón.
- ¿Qué diferencia hay entre los valores de las razones de cambio en estas dos situaciones?

Registren en el siguiente recuadro los acuerdos del grupo.

# Contenido 27

## Medidas de dispersión de datos

Los siguientes tres conjuntos de datos: (7, 8, 8, 8, 9), (6, 7, 8, 9, 10) y (6, 6, 8, 10, 10) tienen la misma media aritmética, que es 8. Si se tratara de tus calificaciones en cinco asignaturas, en tres bimestres distintos, ¿qué podrías decir sobre tu aplicación en estas asignaturas? ¿Cómo interpretas esos datos: cinco calificaciones obtenidas por un mismo estudiante en tres asignaturas distintas o cinco calificaciones de tres estudiantes diferentes?

### 27.1. La dispersión de datos. El rango y la desviación media

#### Problema inicial

Los datos que aparecen a continuación corresponden a las temperaturas medias mensuales (en grados Celsius) de enero a noviembre de 2012 de dos ciudades de México:

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N
Yucatán	23	24	26	27	28	28	27	28	28	26	23
Zacatecas	12	13	17	18	21	21	20	20	18	18	15

FUENTE: Comisión Nacional del Agua, <smn.conagua.gob.mx>, consultado el 10 de enero 2013.

¿De qué manera puedes comparar las temperaturas de estas dos entidades federa-  
tivas? Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_

#### Exploración y discusión

- Calcula la temperatura media de esos 11 meses en cada entidad. \_\_\_\_\_
- ¿En cuál de los dos casos, la temperatura media calculada representa mejor a las temperaturas medias mensuales? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Supón que a una persona que vive en el extranjero la destinan a vivir en una ciudad mexicana durante un año. No han determinado cuál será el lugar de residencia; sólo le dicen que la temperatura media es de 22 °C. ¿Es suficiente esa información para decidir, por ejemplo, el tipo de ropa que hay que llevar? \_\_\_\_\_ ¿Qué otro dato calculado podría ayudarle? \_\_\_\_\_
- Si tú fueras esa persona y supieras que la ciudad en que vas a vivir tiene una temperatura media de 22 °C, la temperatura máxima es de 36 °C y la mínima es de 8 °C, ¿sabrías qué ropa llevar en tu maleta? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

A la diferencia entre el valor mayor y el menor de la variable se le llama *rango*.

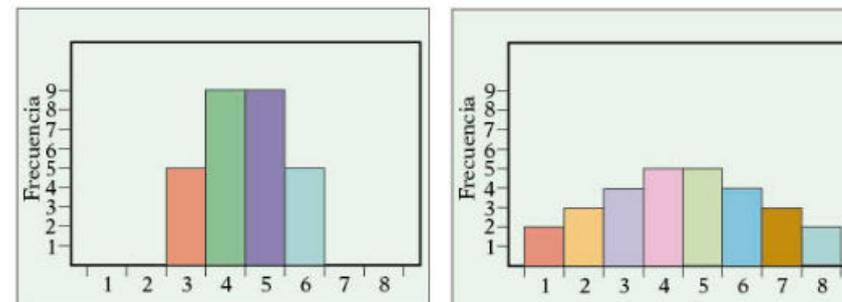
- ¿Cuál fue el rango de las temperaturas medias mensuales de Yucatán en 2012? \_\_\_\_\_  
¿Y el de Zacatecas? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten sus respuestas en el grupo. Además, expliquen de qué manera el rango ayuda a diferenciar la dispersión o variación de las temperaturas en ambas ciudades. Anoten en sus cuadernos las conclusiones grupales.

#### Actividades adicionales

- Analiza la manera en que se distribuyen los datos en siguientes gráficas.



- ¿En qué valor se centran los datos en ambas gráficas? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el rango en los datos de la gráfica de la izquierda? \_\_\_\_\_ ¿Y en la gráfica de la derecha? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las dos gráficas muestra mayor dispersión o variabilidad de los datos? \_\_\_\_\_

- Los goles marcados por dos equipos de futbol en cinco partidos han sido:

Equipo	Goles marcados en cada partido				
A	6	8	1	2	3
B	8	4	3	4	1

- ¿Cuál es el rango del número de goles de cada equipo? \_\_\_\_\_  
¿Y la media? \_\_\_\_\_
- En este caso, ¿sirve el rango para diferenciar entre sí los resultados de estos equipos? Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_
- Si ubicas en una recta los cinco datos del equipo A, ¿a qué distancia de la media está cada uno? (Recuerda que la distancia se considera siempre positiva.) \_\_\_\_\_

d) Registra en la tabla la distancia a que se halla cada dato con respecto a la media.

Número de goles por partido	6	8	1	2	3
Distancia con respecto a la media					

- e) ¿Cuál es el valor más cercano a la media? ¿Y el más lejano?  
 f) ¿Cuál es la media de esas distancias? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero. En caso de no coincidir, revisen sus procedimientos y cálculos para llegar a un acuerdo.



El resultado que has obtenido se llama *desviación media*.

g) Calculen la desviación media de los goles del equipo B.



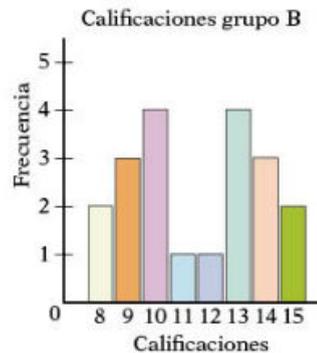
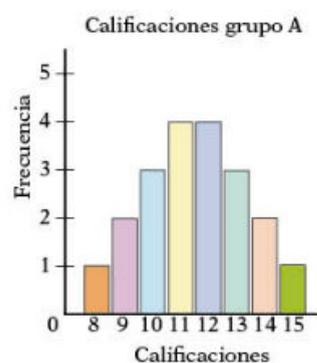
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo sus procedimientos y cálculos. Anoten en sus cuadernos las conclusiones de los equipos.

3. Durante una semana, la asistencia a dos salas cinematográficas fue la siguiente:

Sala A: 0, 45, 49, 50, 51, 55, 100      Sala B: 48, 48, 50, 50, 51, 51, 52

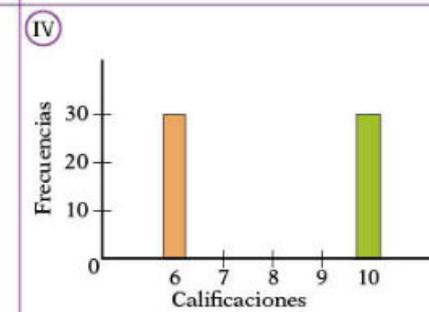
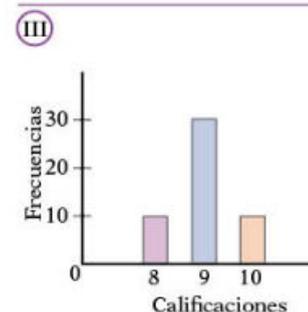
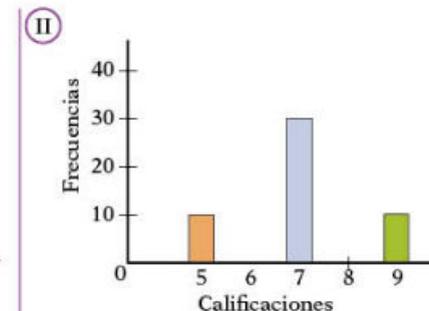
- a) ¿Cuáles fueron la media y la mediana de asistencia en la sala A durante esa semana?  
 b) ¿Y en la sala B?  
 c) ¿Qué tanto varió la asistencia en la sala A? ¿Y en la B?  
 d) Para reconocer la dispersión de los datos de estas dos muestras, ¿sería necesario calcular la desviación media o es suficiente con calcular el rango?  
 ¿Por qué?

4. Se aplicó una prueba a dos grupos de 20 alumnos cada uno. Las siguientes gráficas muestran la distribución de las calificaciones obtenidas.



- a) Analiza las gráficas. Sin hacer operaciones, ¿podrías decir en qué grupo la distribución de calificaciones es más regular y en cuál es más dispersa?  
 b) ¿Cuál es el rango de las calificaciones obtenidas por el grupo A? ¿Y el del grupo B?  
 c) ¿Cuál es la media de las calificaciones obtenidas por el grupo A? ¿Y la del grupo B?  
 d) Calcula la desviación media de las calificaciones de cada grupo.

5. Analiza las siguientes gráficas:



- a) Sin hacer operaciones, halla la media de las calificaciones de cada grupo de alumnos. Después calcúlala realizando operaciones. Explica tu propuesta de solución a un compañero. En caso de que no coincidan sus propuestas, expongan las razones en que las sustentan para llegar a un acuerdo.  
 b) Asignen a cada gráfica uno de los siguientes valores para la desviación media:

Desviación media	Número de gráfica
0.4	
2	
0	
0.8	



Con la ayuda de su profesor, expongan en el grupo los procedimientos y cálculos realizados en su equipo para resolver los problemas, así como las razones en que se basaron para elegirlos. Registren en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Medir alturas de modo indirecto

Cierre del proyecto. En el grupo, en coordinación con su profesor, organicen la presentación de algunos de los resultados de las mediciones que realizaron.



1. Colorea el alvéolo con la respuesta correcta en cada caso.

1. El término que ocupa la posición 25 en la sucesión 1, 4, 9, 16, ... es:

- A) 225
- B) 325
- C) 425
- D) 625

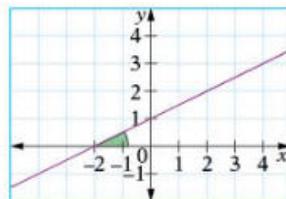
2. La fórmula para hallar el término enésimo de la sucesión 2, 5, 10, 17, ... es:

- A)  $n^2 + 1$
- B)  $n^2 + 2$
- C)  $n^2 + 3$
- D)  $n^2 + 4$

3. La fórmula para hallar el término enésimo de la sucesión 9, 19, 35, 57, ... es de la forma  $an^2 + n + 5$ . ¿Cuál es el valor de  $a$ ?

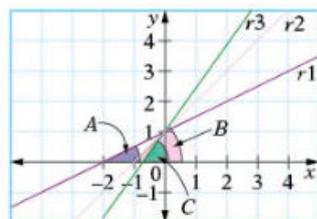
- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

4. ¿Qué relación hay entre el valor de la pendiente de una recta y el valor del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje  $x$ ?



- A) A mayor amplitud del ángulo, corresponde un mayor valor de la pendiente.
- B) Cuando el ángulo se acerca a  $0^\circ$ , el valor de la pendiente se acerca a 1.
- C) Si el ángulo es de  $45^\circ$ , el valor de pendiente es 0.
- D) Si el ángulo se acerca a  $90^\circ$ , el valor de la pendiente se acerca al valor 90.

5. Las siguientes tres rectas forman los ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  con la dirección positiva del eje  $x$ . Considera las rectas para formar tres triángulos rectángulos, uno para cada ángulo. ¿Cuál es el valor de la tangente de cada uno de esos ángulos?

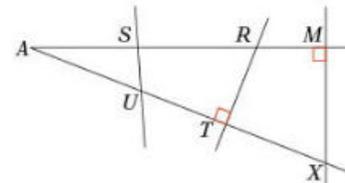


- A) Tangente  $A = 1$ ,  
tangente  $B = \frac{3}{2}$ ,  
tangente  $C = 2$
- B) Tangente  $A = \frac{2}{3}$ ,  
tangente  $B = \frac{3}{4}$ ,  
tangente  $C = 1$
- C) Tangente  $A = 2$ ,  
tangente  $B = 1$ ,  
tangente  $C = \frac{1}{2}$
- D) Tangente  $A = \frac{1}{2}$ ,  
tangente  $B = 1$ ,  
tangente  $C = \frac{3}{2}$

6. Las siguientes afirmaciones se refieren a un triángulo  $ABC$  rectángulo isósceles. ¿Cuál de ellas es falsa?

- A) Los valores del seno y del coseno del ángulo agudo  $A$  son iguales.
- B) El valor de la tangente del ángulo agudo  $A$  es 1.
- C) El valor de la tangente del ángulo agudo  $A$  es mayor que el del seno del mismo ángulo.
- D) El valor del seno del ángulo agudo  $A$  es 1.

7. En la siguiente figura, el coseno del ángulo  $A$  puede escribirse:

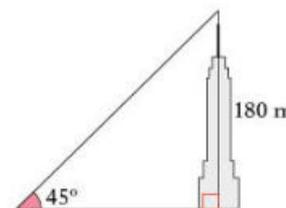


- A)  $\frac{AS}{AU}$
- B)  $\frac{AT}{AR}$
- C)  $\frac{AX}{AM}$
- D)  $\frac{AR}{AT}$

8. ¿Cuál de las siguientes no es una propiedad del coseno de un ángulo agudo?

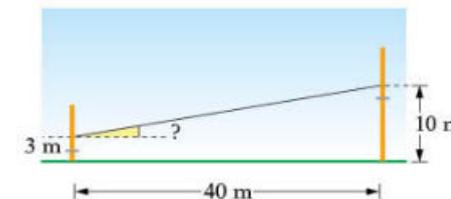
- A) Es el cociente de dos longitudes expresadas en la misma unidad.
- B) El cociente de dos números positivos.
- C) Su valor es igual al de la tangente cuando el ángulo es de  $45^\circ$ .
- D) Es un cociente en el que el numerador es mayor que el denominador.

9. La Torre Latinoamericana, en la Cd. de México, tiene una altura aproximada de 180 m, incluida la antena. ¿A qué distancia de ella debo colocarme (tendido en el suelo) para verla con un ángulo de  $45^\circ$ ?



- A) 100 m
- B) 140 m
- C) 180 m
- D) 220 m

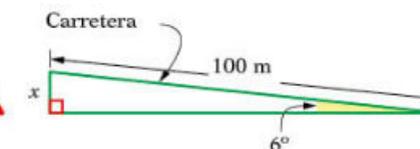
10. En un parque de diversiones se desea instalar una tirolesa entre dos postes separados 40 m entre sí. El punto de partida está a 10 m de altura, y el de llegada, a 3 m. ¿Cuánto mide, aproximadamente, el ángulo que forma el cable, sujeto a los postes, con la horizontal? (Usa la tabla de razones trigonométricas que está al final del libro.)



La persona se desliza en la tirolesa porque el cable tiene una pendiente negativa con respecto de la horizontal.

- A)  $10^\circ$
- B)  $12^\circ$
- C)  $14^\circ$
- D)  $16^\circ$

11. La figura de la izquierda representa una señal de carretera que indica un descenso peligroso. Según la otra figura, al recorrer 100 m en carretera recta, ésta forma con la horizontal un ángulo de  $6^\circ$ .



¿Qué altura se ha bajado con respecto a la horizontal?

- A) 8 m
- B) 9 m
- C) 10 m
- D) 11 m

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Núm. de lista \_\_\_\_\_

12. La siguiente tabla muestra la distancia recorrida en carretera por un autobús conforme transcurren los minutos.

Tiempo (en minutos)	Distancia (en km)
0	0.0
10	15.0
15	22.5
25	37.5
50	75.0

¿Cuál es la razón de cambio en la distancia recorrida de los 25 a los 50 minutos?

- A 1.5
- B 15
- C 37.5
- D 75

13. Los siguientes datos representan la ganancia total de una tienda por la venta de distintas cantidades de bicicletas infantiles.

Número de bicicletas	Ganancia (en pesos)
0	0
4	600
7	1050
12	2100
14	2450
15	2550

¿En qué intervalo se produjo un cambio en las ganancias con respecto al número de bicicletas vendidas?

- A De 4 a 7 bicicletas
- B De 7 a 12 bicicletas
- C De 12 a 14 bicicletas
- D De 14 a 15 bicicletas

Utiliza la siguiente información para contestar los problemas 14 y 15: A dos grupos de 15 alumnos cada uno, se les aplicó una prueba de 35 preguntas. Los resultados fueron los siguientes:

Grupo "A": 20, 22, 29, 27, 26, 27, 31, 26, 30, 25, 28, 28, 19, 31, 27  
 Grupo "B": 24, 25, 22, 25, 25, 25, 30, 27, 27, 19, 21, 24, 34, 29, 21

Para determinar en cuál de los dos grupos las calificaciones son menos dispersas, contesta las siguientes preguntas:

14. ¿Cuál es el rango de calificaciones de cada grupo?

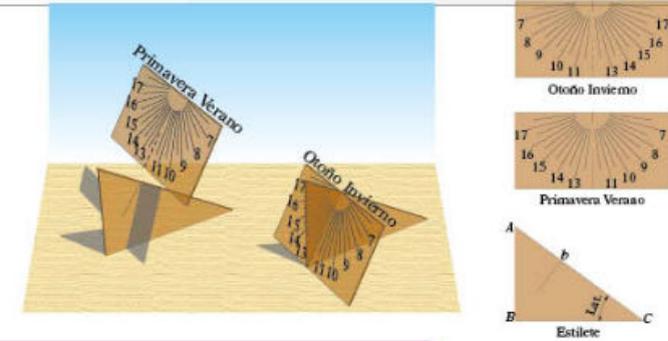
- A Grupo "A": 31, Grupo "B": 30
- B Grupo "A": 12, Grupo "B": 9
- C Grupo "A": 12, Grupo "B": 21
- D Grupo "A": 20, Grupo "B": 24

15. ¿Cuál es la desviación media de las calificaciones de cada grupo?

- A Grupo "A": 2.93, Grupo "B": 2.53
- B Grupo "A": 2.72, Grupo "B": 2.8
- C Grupo "A": 2.75, Grupo "B": 2.65
- D Grupo "A": 2.8, Grupo "B": 2.9

## Un reloj de sol

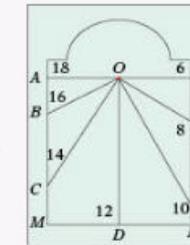
Un reloj solar está formado por dos piezas: una rectangular, que será el cuadrante en que se marcan las horas (de las 6 a las 18 horas), y otra triangular, que sirve de soporte (la sombra que proyecta va indicando las horas).



1. Algunas medidas del cuadrante de un reloj solar son las siguientes:

$$OA = 30 \text{ cm}, OD = 60 \text{ cm} \text{ y } \angle AOB = \angle BOC = 30^\circ$$

Halla las medidas de  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ , redondeadas a milímetros, y explica cómo hiciste el cálculo.

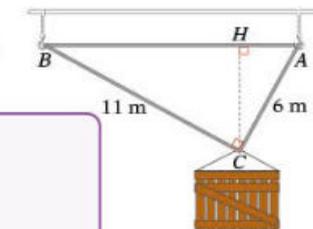


2. ¿Cuál de las siguientes expresiones te permite calcular la medida de  $AC$ ?

- a)  $\tan 30^\circ = \frac{AC}{30}$
- b)  $\tan 60^\circ = \frac{AC}{30}$
- c)  $\cos 30^\circ = \frac{AC}{30}$
- d)  $\cos 60^\circ = \frac{AC}{30}$

## Cargas pesadas

Una carga está suspendida de dos ganchos (A y B) por dos cables perpendiculares entre sí, cuyas longitudes son 11 m y 6 m.



3. ¿Qué distancia separa a los ganchos? Muestra tus operaciones.

4. ¿Cuánto mide  $\angle BAC$ ?

5. ¿Con cuáles de las siguientes expresiones se puede calcular la medida de la altura  $CH$ ? Márcalas con una (✓).

- $CH = \frac{6}{\sin 30^\circ}$
- $CH = \frac{6}{\sin 60^\circ}$
- $CH = \frac{\sin 30^\circ}{6}$
- $\sin 60^\circ = \frac{CH}{6}$

¿Qué tanto has logrado los aprendizajes esperados? Identifica las situaciones que eres capaz de resolver y márcalas con una (✓). *Puedo resolver problemas...*

... sobre sucesiones cuadráticas, como:	
<input type="checkbox"/> Encontrar el término que ocupa la posición 25 en la sucesión $3n^2$ .	<input type="checkbox"/> Obtener la expresión algebraica que define la sucesión 3, 5, 7, 9, 11...
... sobre los cuerpos que se generan al girar figuras geométricas sobre un eje, como:	
<input type="checkbox"/> Un rectángulo se gira sobre uno de sus lados. ¿Qué cuerpo geométrico se genera? ¿Cómo es su desarrollo plano?	<input type="checkbox"/> Un triángulo rectángulo se gira sobre uno de sus catetos. ¿Qué cuerpo geométrico se genera?
... que implican cuestiones relacionadas con la gráfica de una recta, como:	
<input type="checkbox"/> ¿Qué relación hay entre la pendiente de una recta y la tangente del ángulo del triángulo rectángulo formado por la recta y el eje de las abscisas?	<input type="checkbox"/> ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo agudo que forman las rectas con el eje de las abscisas y valor de la pendiente de esas rectas.
... que implican razones trigonométricas, como:	
<input type="checkbox"/> ¿De qué manera se obtienen los valores del seno y el coseno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?	<input type="checkbox"/> En el triángulo $JKL$ , $\overline{JL} = 13$ cm; $\overline{JK} = 12$ cm; $\overline{KL} = 5$ cm. ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?
... sobre la razón de cambio de fenómenos, como:	
<input type="checkbox"/> Obtener el valor de la razón de cambio de fenómenos a partir de tablas de valores correspondientes a los fenómenos.	<input type="checkbox"/> Comparar la razón de cambio de dos fenómenos a partir de las rectas que los representan.
... que implican analizar el comportamiento de un fenómeno a partir de medidas de dispersión de sus datos, como: Los puntos anotados por dos equipos de basquetbol en 8 partidos son: equipo A: 15, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 19; equipo B: 15, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 19.	
<input type="checkbox"/> ¿Cuál es el rango de los dos conjuntos de datos?	<input type="checkbox"/> ¿Cuál de los dos conjuntos de datos es más disperso?
Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido con el estudio de este bloque.	Plantea un problema que ahora ya puedas resolver con los conocimientos y habilidades que desarrollaste en este bloque.
1. _____	_____
2. _____	_____
En este bloque, ¿en qué consistió tu participación en la resolución de los problemas planteados?	Cuando en tu equipo un compañero daba una respuesta errónea a un problema propuesto, ¿de qué manera mostraste tu desacuerdo?
_____	_____
_____	_____
_____	_____

## ¿Quiénes utilizan la probabilidad y la estadística?

Si nos preguntan: ¿quiénes utilizan la probabilidad y la estadística?, lo primero que viene a nuestra mente son todo tipo de empresas aseguradoras y aquellos cuyo negocio tiene relación con el azar. Pero el campo de aplicación de estas disciplinas es mucho más amplio, cubren casi todos los campos del quehacer humano, como la agricultura, la medicina, la física, las ciencias sociales, entre otros.

En todos estos campos se nos proporciona una gran cantidad de información por medio de tablas con datos numéricos. Como es difícil extraer de éstos la información que contienen, se busca condensarla en un número pequeño de cifras: medidas de tendencia central, de dispersión, etcétera. De esta manera, la información se utiliza para resolver problemas de la vida real, como la predicción de accidentes de carretera, casamientos y defunciones o un brote de gripe en una comunidad, por mencionar algunos.

En la resolución de estos problemas se ponen en juego una diversidad de conceptos matemáticos. Esto lleva a pensar que las matemáticas son de gran utilidad tanto para el estudio del mundo como para la solución de los problemas que se presentan en él.



La figura muestra algunas formas de representar la información estadística: gráficas de barras, circulares y de línea.

### PROYECTO DEL BLOQUE

Construir recipientes de diferentes formas y capacidades

En el mercado existe una diversidad de productos líquidos o sólidos envasados en recipientes en forma de prismas, cilindros y conos. Para el diseño de tales envases se toman en cuenta tanto la capacidad que se requiere como las dimensiones más adecuadas para su manejo y almacenamiento.

Elaboren en equipo algunos envases cuya capacidad sea, por ejemplo, de un litro, de medio litro o de un cuarto de litro. Los contenidos 30 y 33 de este bloque y el 22 del anterior, te ayudarán a desarrollar el proyecto.

# BLOQUE

# V

## Aprendizajes esperados:

El alumno:

- Resuelve y plantea problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.

- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.

- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

## Resolución de problemas mediante ecuaciones

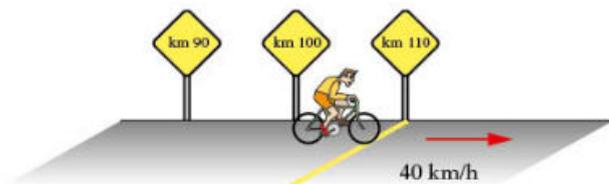
Cuenta una leyenda griega que, en el año 490 a.n.e., el soldado Fidípides corrió desde Maratón hasta Atenas para anunciar la victoria de los griegos sobre los persas. Según la historia, el soldado murió después de dar la noticia. Si la distancia entre esas dos ciudades es de 42 km, aproximadamente, y suponiendo que Fidípides corrió a 14 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrió esa distancia?

**Te recomendamos la lectura**  
 "Ecuaciones simultáneas. Velocidad" y otros temas, en Hernández Garcíadiego, C., Matemáticas y deportes, México, Santillana, 2007.

### 28.1. Resolución de problemas con ecuaciones lineales

#### Problema inicial

En una carretera, un ciclista parte hacia el Norte desde el kilómetro 110, a una velocidad de 40 km por hora.



Una hora más tarde, y desde el kilómetro 90 de la misma carretera, un motociclista trata de alcanzarlo a 80 km por hora.



¿Cuánto tiempo habrá viajado el ciclista al momento en que le dan alcance?  
 ¿En qué punto de la carretera ocurre esto?

#### Exploración y discusión

- ¿En qué punto de la carretera se localiza el ciclista cuando empieza a pedalear?  
 ¿En qué punto se halla una hora después? ¿Y luego de 3 horas?
- En una recta numérica como la siguiente, representa la ubicación del ciclista en algunos momentos de su recorrido. Haz lo mismo para el motociclista. ¿En qué punto éste alcanza al primero?



- Completa la tabla de valores que representa la ubicación de estas dos personas en algunos momentos del recorrido. ¿En qué punto el motociclista alcanza al ciclista? Discute con un compañero tu respuesta. En caso de que tengan resultados diferentes, expongan sus argumentos para llegar a un acuerdo.

Hora	0	1	2	3	4
Ubicación del ciclista					
Ubicación del motociclista					

- ¿En qué punto ( $r$ ) de la carretera se localiza el ciclista cuando empieza a pedalear?  
 ¿En qué punto ( $r$ ) se halla una hora después? ¿Y  $t$  horas después?  
 ¿Qué expresión algebraica representa la ubicación del ciclista en cualquier momento de su recorrido?
- Al momento de ocurrir el alcance, el ciclista había pedaleado durante  $t$  horas.  
 ¿Cuántas horas había viajado el motociclista? ¿Qué expresión algebraica representa la ubicación del motociclista en cualquier momento de su recorrido?
- ¿Qué ecuación o sistema de ecuaciones resuelve el problema?
- Si plantearon un sistema de ecuaciones con las variables  $r$  y  $t$ , ¿qué significa el valor que encontraron para  $t$  en el contexto de la situación? ¿Qué significa  $r$ ?

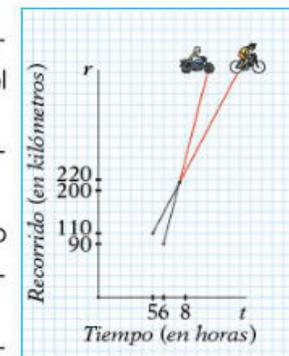


Expongan y argumenten en el grupo los cálculos y procedimientos que utilizaron los equipos para resolver el problema. Registren en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales



- La siguiente gráfica recorrido-tiempo representa las trayectorias del ciclista y el motociclista, suponiendo que el primero comenzó a las 5 de la mañana, y el segundo, a las 6.



- ¿Qué punto del plano cartesiano representa el comienzo del recorrido del ciclista? ¿Y el del motociclista?
- ¿Qué representan las partes de las rectas destacadas en color rojo?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto de encuentro de las dos rectas? ¿Qué representa este punto?
- Comparen sus respuestas a las tres preguntas anteriores con las que dieron en el apartado *Exploración y discusión*.

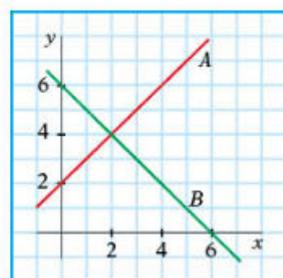
2. Un automovilista parte hacia la misma dirección, desde el kilómetro 100 de la misma carretera, a 100 km por hora, 2 horas después que el ciclista.
- Tracen sobre el plano cartesiano anterior la trayectoria del automovilista.
  - ¿En qué punto de la carretera logrará alcanzar al ciclista? ¿En qué momento?
  - Verifiquen su respuesta mediante un sistema de ecuaciones.
  - ¿De qué otra manera pueden resolver este problema?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo los cálculos y procedimientos utilizados por los equipos. Registren en sus cuadernos las conclusiones del grupo.



3. La siguiente figura muestra la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales. Analícenla para responder las cuestiones que se plantean.



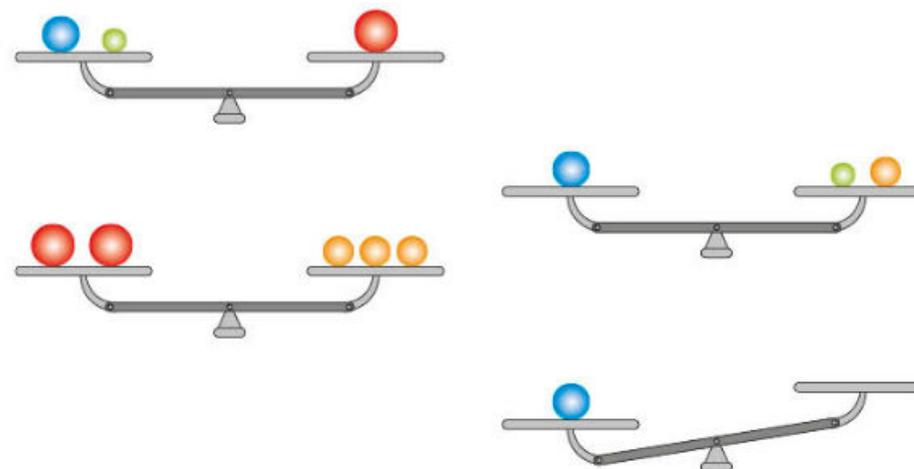
- a) Representen esta situación mediante una tabla de valores.

- ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la recta A? ¿Y a la recta B?
  - De acuerdo con la representación gráfica, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones?
  - Resuelvan el sistema para verificar la solución que muestra la gráfica.
4. Las siguientes situaciones se refieren a la gráfica anterior. ¿Cuál de ellas puede representarse mediante la gráfica A? ¿Y cuál con la gráfica B? Escriban la letra correspondiente.
- \_\_\_\_\_ La suma de dos números es 6
  - \_\_\_\_\_ La suma de dos números es 8
  - \_\_\_\_\_ Un número es 4 unidades mayor que otro
  - \_\_\_\_\_ Un número es 2 unidades mayor que otro

5. Resuelvan los siguientes problemas mediante el procedimiento que juzguen más adecuado. Verifiquen sus respuestas por medio de una ecuación, un sistema de ecuaciones, una tabla o una gráfica.
- Dos autobuses van de Guadalajara a Tijuana por una misma carretera. Uno de ellos salió a las 8 a. m., y viaja a una velocidad uniforme de 80 km por hora. El otro salió a las 9 a. m., con una velocidad uniforme de 100 km por hora. ¿En cuánto tiempo alcanzará el segundo autobús al primero?
  - La suma de dos números es 10 y la diferencia entre ellos es 3. ¿Cuáles son los números?
  - María dice que la suma de su edad (en años) y el número de la casa en que vive es 100. Ella ha descubierto que si al número de su casa le resta cuatro veces su edad, el resultado es 30. ¿Cuál es la edad de María? ¿Cuál es el número de su casa?
  - Para tener derecho a usar las instalaciones de un deportivo, deben pagarse una cuota de inscripción y mensualidades fijas. Después de 6 meses, un usuario encontró que ya había pagado \$ 1 480.00. Y a los 10 meses había cubierto \$ 1 800.00. ¿De cuánto es la cuota de inscripción? ¿De cuánto es la mensualidad?
  - ¿Qué número representa cada literal? Tomen en cuenta que, en cada columna, una misma literal representa un mismo valor, pero que esos valores son diferentes en la otra columna.

$A + B = A$	$A \times B = 35$
$C - A = 4$	$30 + B = C$
$A + A = 8$	$C \times D = 12$
$D + A = 7$	$D + E = 3$
	$D \times E = D$

- f) ¿Con cuántas canicas verdes se equilibra una azul?



Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus propuestas de solución a los problemas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones grupales.

Usemos las TIC



- Utiliza los recursos que se proponen para practicar la resolución de sistemas de ecuaciones:
- <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-se-cundaria/eb-sistemas-de-ecuaciones-2>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

28.2. Resolución de problemas con ecuaciones lineales y cuadráticas

Problema inicial

Un granjero utilizó 40 m de alambre para cercar un corral rectangular, uno de cuyos lados es la barda de su casa. Si el terreno cercado tiene una superficie de 150 m<sup>2</sup>, ¿cuáles podrían ser las dimensiones del corral?



Exploración y discusión

- a) Si la superficie del corral es de 150 m<sup>2</sup>, ¿es posible que mida 4 m de ancho? Si eso fuera posible, ¿cuánto mediría de largo? ¿La suma de las longitudes de los tres lados es 40 m? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.
- b) Utilicen el procedimiento de tanteo para encontrar las dimensiones del corral y registren los resultados en una tabla como la siguiente. Por ejemplo, la medida del ancho no puede ser 3. ¿Por qué?

Ancho, <i>a</i> (en m)	3	4	5	6	8	10	12	14	15
Largo, <i>l</i> (en m)	$40 - 2 \times 3 = 34$								
$A = l \times a$	$34 \times 3 \neq 150$								

- c) ¿Hay más de una solución? En caso afirmativo, ¿cuáles son?
- d) Si representan con *x* la medida del ancho, ¿cómo representan la medida del largo? Representen simbólicamente el producto *largo* × *ancho* y anoten sus respuestas en la siguiente figura.



- e) Representen mediante una ecuación que el área del corral es 150 m<sup>2</sup> y resuélvanla. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?
- f) ¿Cuáles son las dimensiones del corral? ¿Estas soluciones son las mismas que obtuvieron por el método de tanteo?



Con el apoyo de su profesor, expongan y argumenten sus respuestas en el grupo. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Actividades adicionales

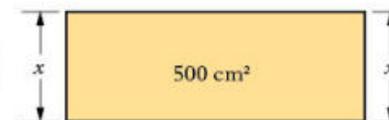


1. Tomen en cuenta las ecuaciones A, B y C para responder.

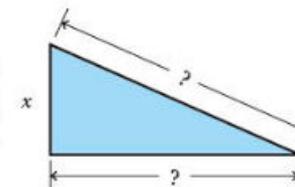
A:  $(x + 3)^2 = (x - 2)^2$   
 B:  $(x + 1)^2 + 3x^2 = (2x - 5)^2 - 2$   
 C:  $(5x + 3)^2 + 4x^2 = (2x - 5)^2 - 41$

- a) ¿A cuál de estas formas generales:  $ax + b = 0$  o  $ax^2 + bx + c = 0$ , puede convertirse cada una de estas ecuaciones?
  - b) ¿Qué condiciones debe cumplir una ecuación para que tenga más de una solución?
  - c) ¿Cuántas soluciones tiene cada una?
2. Utilicen el procedimiento que juzguen más adecuado para resolver cada uno de los siguientes problemas. Verifiquen sus respuestas mediante el planteo y resolución de una ecuación cuadrática, o trazando una gráfica.
- a) El producto de dos números enteros consecutivos es 210. ¿Cuáles son los números?
  - b) Hay cuatro números enteros impares consecutivos. El producto del segundo y el tercero es 10 unidades menor que el cuadrado del cuarto. ¿Cuáles son los cuatro enteros?
  - c) La suma de un número y su recíproco es igual a 5 veces el número. ¿Cuál es el número?
  - d) La familia Martínez tiene tres hijos. El mediano le lleva dos años al menor y, a su vez, el mayor le lleva dos años al mediano. El producto de las edades del menor y el mayor es igual a tres veces la del mediano. ¿Cuál es la edad de cada uno?

- e) Un retrato rectangular ocupa una superficie de 500 cm<sup>2</sup>. La base es 5 cm mayor que la altura. ¿Cuáles son sus dimensiones?



- f) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 4 cm mayor que el cateto más corto y 2 cm mayor que el otro cateto. ¿Cuánto miden los tres lados del triángulo?



La fórmula de la caída libre es  $d = \frac{gt^2}{2}$ , donde *g* es la constante de gravitación (aproximadamente igual a 9.81 m/s<sup>2</sup>).

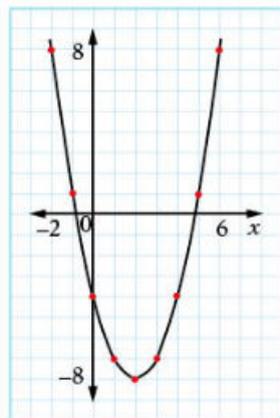
- g) Cuando una pelota de beisbol se lanza desde una altura de 43.92 m, ¿cuánto tarda en llegar al suelo?

h) Un paracaidista se lanzó de un avión y contó 10 segundos antes de jalar la cuerda de su paracaídas. ¿Qué distancia cayó en ese tiempo?



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten los cálculos y procedimientos utilizados en la resolución de los problemas anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones a que llegue el grupo.

3. Consideren la gráfica de la función  $y = x^2 - 4x - 4$ :



- El valor de  $y$  es 0 para dos valores de  $x$ : uno que está entre  $-1$  y  $0$ , y otro, entre  $4$  y  $5$ . Expliquen de qué manera esta información puede obtenerse de la gráfica.
- Encuentren los valores de  $x$ , con una cifra decimal, que den el valor de  $y$  más cercano a 0. Justifiquen su respuesta.

4. Consideren la siguiente tabla de valores de las variables  $x$  y  $y$  de la función  $y = 2x^2 - 5x - 8$ :

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	25	10	-1	-8	-11	-10	-5	4	17

- El valor de  $y$  es 0 para dos valores de  $x$ : uno que está entre  $-2$  y  $-1$ , y otro, entre  $3$  y  $4$ . Expliquen de qué manera, con esta información, puede obtenerse un bosquejo de la gráfica de la función  $y = 2x^2 - 5x - 8$ .
- Encuentren los valores de  $x$ , con una cifra decimal, que den el valor de  $y$  más cercano a 0. Justifiquen su respuesta.



Ayudados por su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a los problemas anteriores. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencia hay entre las soluciones de un problema que se resuelve con un sistema de ecuaciones y otro que se resuelve con una ecuación cuadrática?
- ¿Qué diferencia hay entre las representaciones gráficas de la solución de esos problemas?

Anoten en su cuaderno las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC

• Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo resolver problemas mediante ecuaciones lineales o cuadráticas:

– <https://es.khanacademy.org/math/eb-1- semestre-ba-chillerato/eb-ecuaciones-lineales-y-funciones-2>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

# Contenido 29

## Secciones planas de cilindros y conos. Problemas de variación

Supón que tienes en la mano un vaso cilíndrico medio lleno de agua. Si lo pones sobre la mesa, ¿qué figura geométrica forma la superficie libre del agua? Si inclinas un poco el vaso de agua, la superficie libre del agua cambia de forma; ¿cómo es? Supón ahora que el recipiente es cónico y que está también medio lleno de agua. ¿Qué formas toma la superficie libre del agua al ir inclinandolo poco a poco?

### 29.1. Secciones planas de cilindros y conos

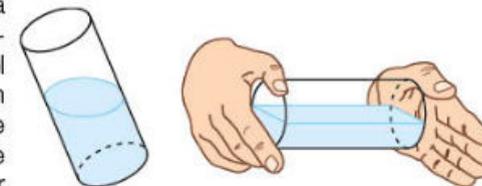
#### Problema inicial

*Un experimento con el cilindro.* Toma un vaso cilíndrico y ponle agua (o arena), sin llenarlo, e inclínalo un poco. La superficie libre del agua (o arena), que inicialmente presentaba la forma de un círculo, ahora toma la forma de un óvalo, el cual, en matemáticas, recibe el nombre de *elipse*.



a) ¿Qué inclinación debes darle al vaso y hasta qué nivel debe llegar el agua, para que se forme la elipse de mayor tamaño? Haz la prueba y comenta tus respuestas con un compañero.

b) Ahora tapen el vaso con la palma de la mano y colóquenlo de manera horizontal. La superficie libre del agua (o arena) toma la forma de un rectángulo. ¿Qué cantidad de ese material deben ponerle para que se forme el rectángulo de mayor tamaño?



c) Supongan ahora que abren la llave de agua para llenar un tanque de agua cilíndrico que está colocado horizontalmente. ¿Qué cambios va adquiriendo el rectángulo que forma la superficie libre de agua?

d) Finalmente, supongan que tienen un queso de forma cilíndrica. ¿Cómo harían un corte plano con un cuchillo para obtener la mayor elipse?

*Un experimento con el cono.* Pongan agua (o arena) en un vaso cónico transparente, sin llenarlo.

a) ¿Qué figura forma la superficie libre del agua (o arena) si el eje del cono es perpendicular al piso? Y si inclinan un poco el vaso, ¿qué figura se forma?

b) Tapen el vaso con la palma de la mano e inclínelo de modo que la superficie libre del agua (o arena) sea paralela a la generatriz opuesta. ¿Qué figura se forma?



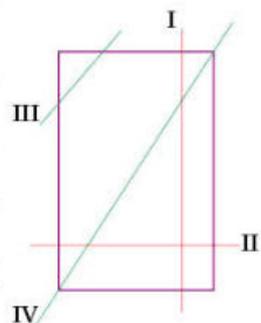
- c) Construyan un cono con plastilina. Con cuidado, van a efectuar cortes planos con un cuchillo.
- ¿Cómo harían los cortes para obtener círculos? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo tendrían que hacer los cortes para obtener elipses? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo obtienen parábolas? \_\_\_\_\_



Con la ayuda de su profesor, presenten sus respuestas en el grupo. Registren en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**Actividades adicionales**

1. El rectángulo de la figura representa un cilindro visto de frente, y las rectas representan planos que lo cortan.

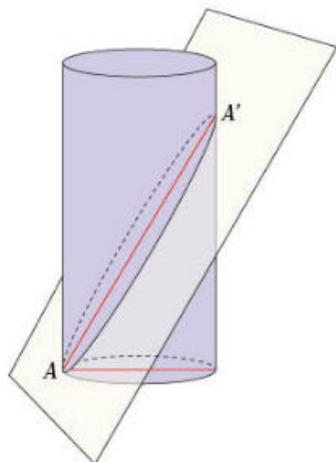


- ¿Qué diferencia hay entre las figuras que forman los planos I y II cuando cortan el cilindro?
- En tu cuaderno, traza las figuras que forman los planos I y II. Comenta tu respuesta con un compañero.
- ¿Qué diferencia hay entre las figuras que forman los planos III y IV cuando cortan el cilindro?
- ¿Qué particularidad tiene la elipse que forma el plano IV, en relación con las otras elipses que podrían formar otros planos al cortar el cilindro?



Reúnanse con otro equipo para discutir sus respuestas. Escriban enseguida los acuerdos que tomen.

2. Un cilindro, cuya base tiene un diámetro de 10 cm, es cortado por un plano que forma un ángulo de  $60^\circ$  con el plano de la base



- ¿Qué razón trigonométrica emplearías para encontrar la longitud del eje  $AA'$  de la elipse?
- ¿Cuál es la longitud de  $AA'$ ? Discute tu respuesta con un compañero.



Coordinados por su profesor, expongan y expliquen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

Usemos las TIC



- Observa el video "Problemas prácticos" para conocer las figuras que se forman al realizar cortes planos en conos y cilindros:

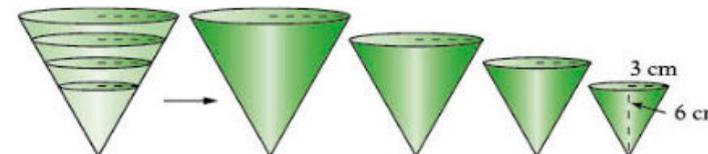
– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/5/1800>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

**29.2. Variación del radio de los círculos en cilindros y conos**

**Problema inicial**

Una empresa de helados vende sus productos en envases cónicos de 6 cm de altura; el radio de la tapa es de 3 cm. La empresa desea ampliar su producción para ofrecer helados en envases cónicos de 8, 10 y 12 cm de altura, como se indica en la siguiente figura.

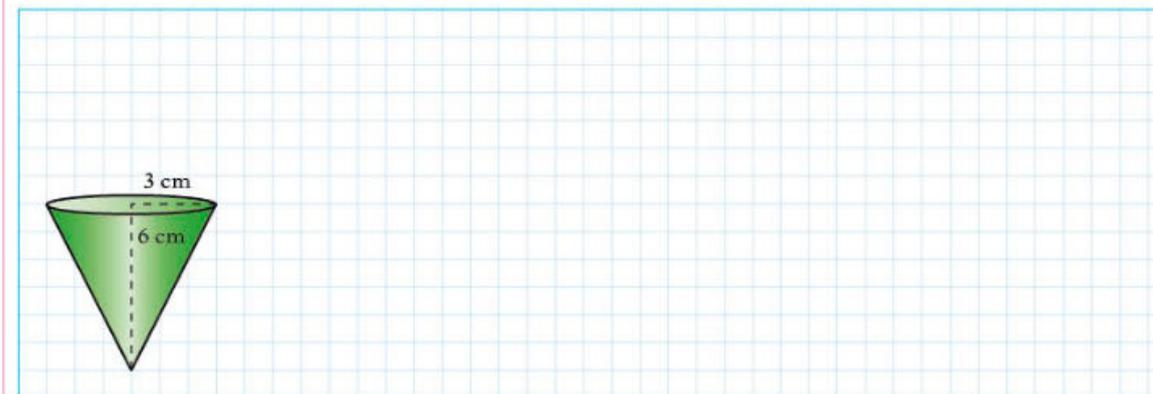


El fabricante pide al ingeniero de producción que calcule el radio de las tapas de los nuevos envases. ¿Cuáles son estas medidas? \_\_\_\_\_ ¿Qué relación hay entre la altura de los conos y el radio de las tapas? \_\_\_\_\_ ¿Son proporcionales estos valores? \_\_\_\_\_

**Exploración y discusión**



- El ingeniero usó papel cuadriculado para hacer un esquema del envase cónico que utiliza la empresa. ¿Podrá utilizar este recurso para determinar el radio de las nuevas tapas? ¿Cómo lo haría? Discute tu respuesta con un compañero.

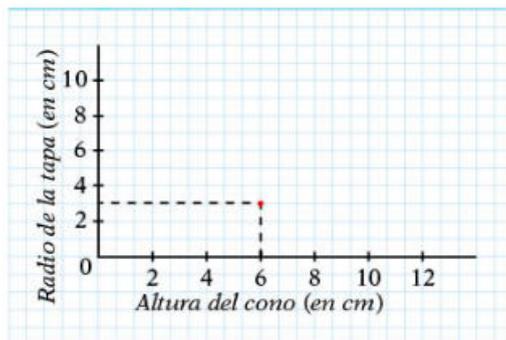


- En las figuras que dibujaron, ¿qué relación hay entre los cuatro triángulos formados por los radios, las alturas y las generatrices?
- Completen la siguiente tabla que relaciona las alturas de los conos y los radios de las tapas.

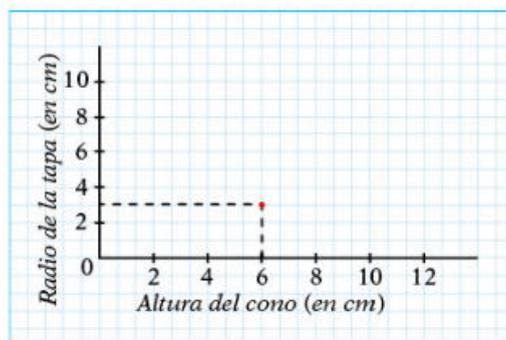
Altura del cono	6 cm			
Radio de la tapa	3 cm			

¿Hay una relación de proporcionalidad entre estos valores? \_\_\_\_\_ Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es la relación de proporcionalidad? \_\_\_\_\_

d) El ingeniero elabora una gráfica como la siguiente para representar la relación entre las alturas de los cuatro conos y los radios de sus tapas. Complétela.

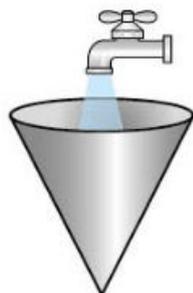


e) Pero al ingeniero le interesa tener la gráfica de esta relación para todos los conos, desde 0 hasta 12 cm de altura. ¿Cómo sería esa gráfica? Trácela en el plano que se muestra enseguida y completen la tabla de valores.



Altura del cono	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Radio de la tapa													

- f) ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Son proporcionales los valores que relaciona la gráfica? ¿Por qué?
- g) Si tuvieran el recipiente cónico en las manos y quisieran llenarlo de agua, ¿qué figura genera la superficie del agua con las paredes del cono? ¿Cuál es el radio cuando el agua alcanza un nivel de 9 cm de altura? ¿Y cuando el recipiente cónico está vacío?
- h) ¿Cómo sería la gráfica que representa la relación entre la altura del nivel del agua y el radio de la superficie del agua? ¿Sería diferente de la gráfica que elaboraron en el inciso e)?



Coordinados por su profesor, discutan y argumenten sus respuestas en el grupo. Anoten en sus cuadernos los acuerdos a que llegue el grupo.

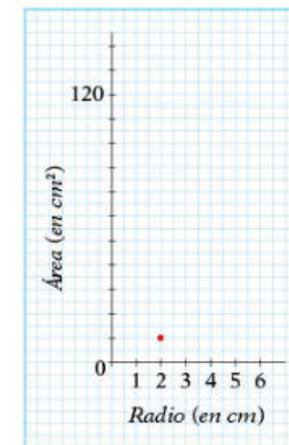
Actividades adicionales

1. Considera la situación del problema inicial para investigar ahora la relación que hay entre el radio y el área de las tapas.

a) Si las tapas son de 2, 3, 4, 5 y 6 cm de radio, ¿cuál es el área de cada una? Registra los resultados en la siguiente tabla.

Radio de la tapa	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm
Área de la tapa					

b) Completa la gráfica que representa la relación entre el radio y el área de estas cinco tapas.



c) ¿Qué forma tiene la gráfica? De acuerdo con esta gráfica, ¿hay una relación de proporcionalidad entre los valores del radio y el área?

¿Por qué?

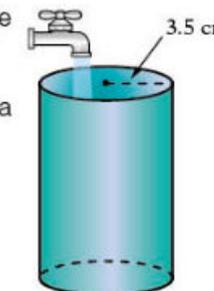
Discútelo con un compañero explicando los argumentos en que basas tu respuesta.

- d) Supongan que tienen el recipiente cónico en las manos y quisieran llenarlo de agua. ¿Cuál es el área de la superficie del agua cuando el radio es de 6 cm? ¿Y cuando el recipiente cónico está vacío?
- e) ¿Cómo sería la gráfica que representa la relación entre el radio de la superficie del agua y el área de esa superficie? ¿Sería diferente de la gráfica que elaboraste en el inciso b)? Trácela en su cuaderno para comprobarlo.

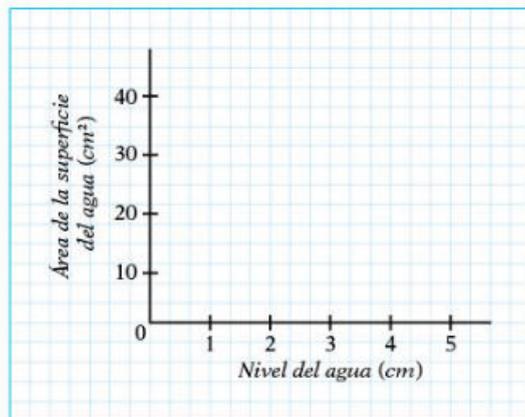
2. Supongan que abren la llave de agua para llenar un vaso cilíndrico de 3.5 cm de radio.

a) Completen la siguiente tabla que relaciona el nivel del agua con el área de la superficie del agua.

Nivel del agua	0 cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Área de la superficie del agua						

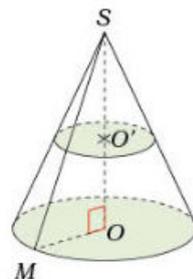


b) Completen la gráfica que representa esta situación.



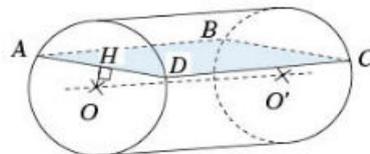
c) ¿Qué diferencia hay entre esta gráfica y la que trazaron para el cono en el inciso b) del problema anterior?

3. A un cono de generatriz  $SM$ , altura  $SO$  y radio de la base  $OM$ , se le ha hecho un corte mediante un plano paralelo a la base, el cual forma un círculo de centro  $O'$ , como se indica en la figura.



Si  $SO' = 7.2$  cm,  $SO = 12$  cm y  $OM = 5$  cm, ¿cuánto mide el radio del círculo de centro  $O'$ ?

4. A un cilindro se le hace un corte mediante un plano paralelo a su eje  $OO'$ . La altura del cilindro es de 15 cm; el radio de su base es de 7 cm. La distancia del punto  $O$  al plano es  $OH = 3$  mm.



¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se produce con el corte?



Coordinados por su profesor, expliquen y argumenten las respuestas que dieron a los problemas anteriores. Registren en sus cuadernos los acuerdos del grupo.



Fórmulas del volumen de cilindros y conos

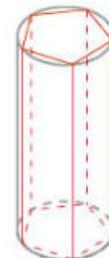
Cuando tenemos invitados en casa y servimos vasos de agua fresca, el número de vasos que podemos llenar depende del volumen de agua de que disponemos y de la capacidad de los vasos en que la serviremos. Si dispusiéramos de vasos cilíndricos y cónicos de la misma base y altura, ¿qué diferencia habría entre el volumen de agua que se requiere para llenarlos?

30.1. Volumen de cilindros

Problema inicial

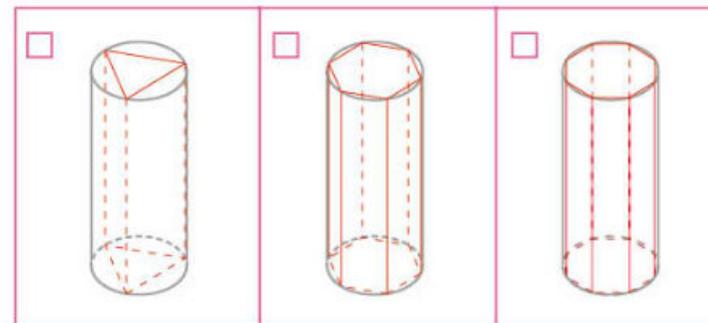
La figura de la derecha muestra un prisma inscrito en un cilindro; es decir, el prisma tiene la misma altura que el cilindro y sus bases son dos polígonos inscritos en las circunferencias de las bases del cilindro.

Supón que se aumenta el número de lados de los polígonos de las bases. ¿Qué sucederá con el número de caras laterales del prisma? ¿Cómo será el volumen del prisma en relación con el del cilindro?



Exploración y discusión

a) Las figuras muestran prismas inscritos en cilindros. ¿Cuál de ellos tiene un volumen más cercano al del cilindro? Márcala con una (✓).



b) La fórmula para calcular el volumen de un prisma es  $V = B \times h$ , donde  $B$  es la superficie de la base y  $h$  es la altura. ¿Es correcto decir que la fórmula para calcular el volumen de un cilindro es también  $V = B \times h$ ? ¿Por qué?



c) Si aceptamos que  $V = B \times h$  es la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, ¿qué representa la letra  $B$  en este caso? Discute tu respuesta con un compañero.

d) ¿Cómo se expresa de modo más específico la fórmula para calcular el volumen de un cilindro? Escriban la fórmula y las razones en que basan su propuesta.



Coordinados por su profesor, comparen en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores y acuerden de qué manera se puede expresar la fórmula para calcular el volumen de un cilindro.

**Actividades adicionales**

Escribe la expresión algebraica que represente la fórmula del volumen de cada uno de los siguientes sólidos. Compara tus respuestas con las de un compañero. Si hay diferencias, analicen sus cálculos para llegar a un acuerdo.

<p>a)</p>	
<p>b)</p>	
<p>c)</p>	
<p>d)</p>	



Con el apoyo de su profesor, expongan y argumenten los cálculos y procedimientos realizados por los equipos para resolver los problemas anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

**PROYECTO DEL BLOQUE**

Construir recipientes de diferentes formas y capacidades

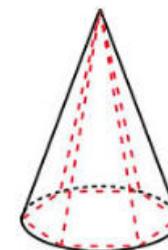
Reúnete con tu equipo de trabajo y elaboren el desarrollo plano de los envases cilíndricos y cónicos que promocionarán. Para decorar su envase, pueden aplicar el diseño de papel tapiz que realizaron en el bloque II. Armen los envases, determinen la capacidad de cada uno e indíquenla con una etiqueta.

Para la siguiente sesión requieres traer juego de geometría, cartoncillo y tijeras.

**30.2. Volumen de conos**

**Problema inicial**

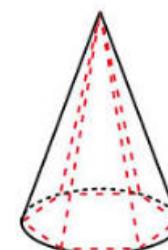
La siguiente figura muestra una pirámide inscrita en un cono. Como puedes ver, la pirámide tiene la misma altura del cono y su base es un polígono inscrito en la circunferencia de la base del cono.



¿Qué sucederá con el número de caras laterales de la pirámide si se aumenta el número de lados del polígono? ¿Cómo será el volumen de la pirámide en relación con la del cono?

**Exploración y discusión**

a) La figura muestra un hexágono inscrito en la base del cono. En la misma figura, inscribe ahora polígonos de 8, 10 o más lados en la base del cono y une los vértices de ese polígono con el vértice del cono. ¿Cuál de esas pirámides tiene un volumen más cercano al del cono?



b) La fórmula para calcular el volumen de una pirámide es  $V = \frac{B \times h}{3}$ , donde  $B$  es la superficie de la base y  $h$  es la altura. Si aceptamos que  $V = \frac{B \times h}{3}$  es también la fórmula para calcular el volumen de un cono, ¿qué representa la letra  $B$  en este caso? Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.

c) ¿Cómo se expresa de modo más específico la fórmula para calcular el volumen de un cono?



Coordinados por su profesor, comparen en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores y acuerden de qué manera se puede expresar la fórmula para calcular el volumen de un cono.

Usemos las TIC

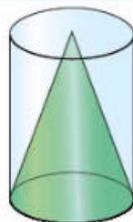


- Observa el video "Volumen de conos y cilindros" para estudiar cómo se obtiene el volumen de conos y cilindros:
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/5/1798>

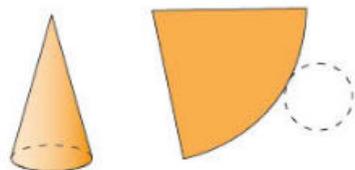
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

Actividades adicionales

1. Está claro que un cono y un cilindro tienen las mismas dimensiones ( $r$  y  $h$ ), el volumen del cono es menor que el del cilindro, pero, ¿qué tan menor?



a) Usa tu juego de geometría para trazar en cartoncillo el desarrollo plano de un cono abierto y ármalo. Luego, con el mismo material, traza el desarrollo plano de un cilindro sin tapa, de la misma base y la misma altura que el cono, y ármalo también.



b) Llena el cono con sal, azúcar u otro material similar, y vierte su contenido en el cilindro. ¿Cuántas veces tienes que vaciar el contenido del cono para que se llene el cilindro?  
 c) ¿Cuántas veces es menor el volumen del cono que el del cilindro, cuando ambos cuerpos tienen la misma área de la base y la misma altura?

2. Las longitudes del radio y la altura de un cono se han medido en centímetros. ¿Cuál es la unidad más conveniente para expresar su volumen?

3. Escribe la expresión algebraica que represente la fórmula del volumen de cada uno de los siguientes sólidos. Compara tus respuestas con las de un compañero. Si hay diferencias, analicen sus cálculos para llegar a un acuerdo.



<p>a)</p>	
<p>b)</p>	
<p>c)</p>	
<p>d)</p>	

Para la siguiente sesión requieres traer envases cilíndricos y cónicos vacíos (por ejemplo, de alimentos, leche, helado, etcétera), con la etiqueta que indique su capacidad, y regla graduada.



Coordinados por su profesor, expongan y argumenten sus respuestas a las actividades anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

# Contenido 31



## Cálculo del volumen de cilindros y conos

¿Cómo calcular el volumen de agua que puede contener un tinaco cilíndrico? ¿A partir de qué medidas puede calcularse ese volumen?

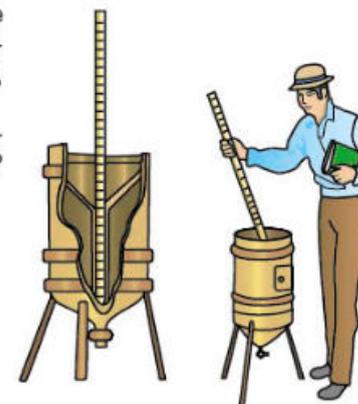
### 31.1. Volumen de cilindros y conos

#### Problema inicial

Un *pluviómetro* es un aparato destinado a medir la cantidad de lluvia que ha caído en un lugar.

Un pluviómetro cilíndrico tiene un diámetro de 20 cm. El agua recogida después de una intensa lluvia se ha vertido en un recipiente, también cilíndrico, cuyo diámetro es el doble: 40 cm.

¿Qué altura habrá alcanzado el agua en el segundo recipiente si en el primero fue de 18.4 cm?



#### Exploración y discusión



a) Puesto que el diámetro del segundo recipiente es el doble que el del primero, el agua alcanzará una menor altura. ¿Será ésta la mitad que la del primero?

¿Por qué?

Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.

b) ¿Cuál es el volumen de agua recogida en el pluviómetro? ¿Qué fórmula podrán utilizar para calcularlo?

c) En relación con el segundo recipiente, ¿qué datos conocen? ¿Qué valor desconocen? ¿Qué procedimiento pueden seguir para calcularlo?



Coordinados por su profesor, expongan los cálculos y los procedimientos empleados en la resolución del problema. Contesten además las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces fue menor la altura que alcanzó el agua en el recipiente cilíndrico de 40 cm de diámetro que en el pluviómetro?
- ¿Qué explicación pueden dar a este hecho, basados en las propiedades de la semejanza de figuras?

Anoten en su cuaderno los acuerdos del grupo.

Actividades adicionales



1. Consigan envases en forma cilíndrica o cónica y, con una regla, encuentren sus dimensiones en centímetros. Calculen su volumen. Luego, comparen sus resultados con la cantidad que se indica en las etiquetas. Si la cantidad está expresada en litros o mililitros, hagan las conversiones correspondientes.

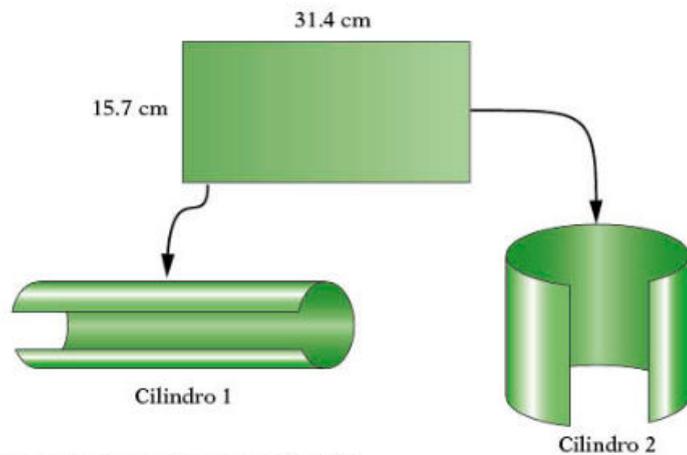


Con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo sus resultados y sus conclusiones.



2. Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

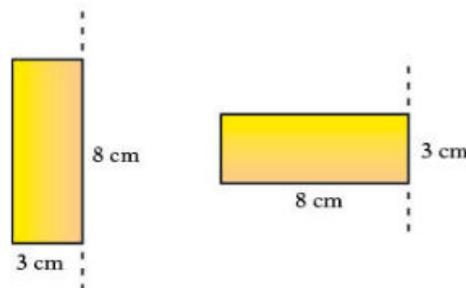
a) Con una placa metálica rectangular de 31.4 por 15.7 cm, pueden construirse dos cilindros, según se arrolle la placa por uno u otro de los lados del rectángulo.



- ¿Cuál es el volumen de cada cilindro?
- ¿Qué relación hay entre los volúmenes de esos cilindros?

b) Haciendo girar un rectángulo de 3 por 8 cm alrededor de cada uno de sus lados, se obtienen dos cilindros.

- ¿Cuál es el volumen de cada uno?
- ¿Qué relación hay entre los volúmenes de esos cilindros?



c) Luisa tiene una pulsera formada por un cordón de oro, de 18 cm de longitud y 4 mm de diámetro. La lleva al joyero para que la funda y elabore una nueva pul-

Usemos las TIC



• Observa el video "Estimar volúmenes" para conocer cómo se obtiene el volumen de conos y cilindros, y cómo se obtiene el valor de una dimensión a partir de conocer el volumen y otras medidas:

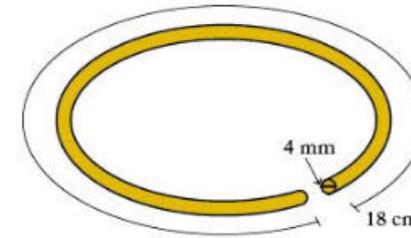
– <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/5/1799>

• Utiliza los recursos que se proponen para calcular el volumen de conos y cilindros:

– <https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-surface-area/basic-geo-volumes/e/volume-word-problems-with-cones-cylinders-and-spheres>

(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

sera de 24 cm de longitud. ¿Cuál será su diámetro? (Ayuda: no sustituyas  $\pi$  por ningún valor.)



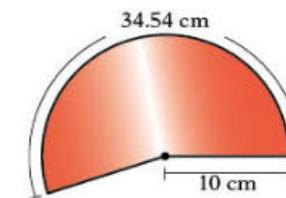
d) Tere quiere llevar a fundir una medalla de oro, de 0.4 cm de espesor y 6 cm de diámetro, para hacer un brazalete circular de 20 cm de longitud. ¿Cuál es el diámetro del brazalete?

e) Un túnel, cuya sección es un semicírculo de 50 cm de diámetro, tiene una longitud de 100 m. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se han tenido que extraer para construirlo?



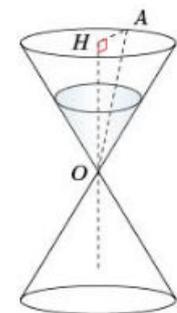
f) Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de cada uno de sus catetos, los cuales miden 30 y 40 cm, se obtienen dos conos. ¿Cuál es el volumen de cada uno?

g) Curvando una cartulina que tiene la forma de un sector circular y uniendo sus radios, se obtiene un cono. ¿Cuál es el volumen de éste sabiendo que el radio del sector es 10 cm y la longitud del arco es de 34.54 cm?



h) Un reloj de arena, como el que se representa en la figura, está formado por dos conos iguales de vértice  $O$ . Sus medidas son:  $\overline{OH} = 12$  cm y  $\overline{OA} = 15$  cm;  $H$  es el centro del círculo superior.

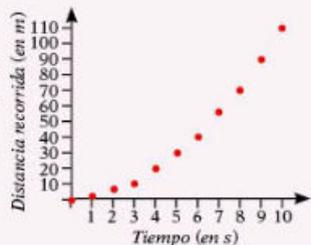
- Calculen la longitud  $AH$ .
- Calculen el volumen del cono superior.
- Supongan que el cono superior está lleno. Si desaloja  $2 \text{ mm}^3$  por segundo, ¿en cuántas horas, minutos y segundos queda vacío?



Coordinados por su profesor, expongan los cálculos y procedimientos empleados en la resolución de los problemas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

## Relación entre la fórmula de una función y su representación gráfica

Los valores de la distancia recorrida por un automóvil en los primeros 10 segundos están dados en la gráfica de la derecha.  
¿En qué momento, el automóvil alcanza una distancia recorrida de más de 50 metros?



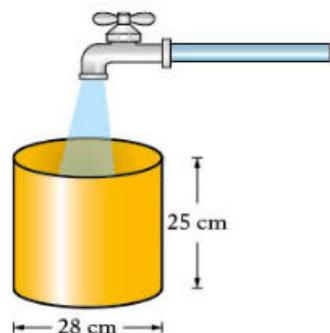
Te recomendamos la lectura

"La caja más grande", en De la Peña, J. A., Geometría y el mundo, México, Santillana, 2002b.

### 32.1. Variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

#### Problema inicial

Estoy llenando de agua un bote cilíndrico de 28 cm de diámetro y 25 cm de altura.



¿Qué volumen de agua hay en el bote cuando la altura que alcanza en el recipiente es de 1 cm, 2 cm, 3 cm, ... 25 cm?

¿De qué manera puede representarse la relación entre la altura que alcanza el agua en el bote y el volumen?

#### Exploración y discusión

a) Completa la siguiente tabla que relaciona la altura y el volumen de agua.

Altura (cm)	0	5	10	15	20	25
Volumen (cm³)						

b) ¿Hay una relación de proporcionalidad entre la altura y el volumen de agua que hay en el bote? ¿Por qué?

Discute con argumentos tu respuesta con un compañero.

c) Utilicen la tabla anterior para saber el volumen de agua cuando alcanza un nivel de 22.5 cm de altura.

d) En esta situación, ¿qué expresión algebraica representa la variación del volumen ( $V$ ) de agua con respecto a la variación de  $h$  (la altura del agua) entre 0 y 25 cm?

e) De las siguientes expresiones algebraicas, ¿cuál es la que representa la relación entre la altura del agua y el volumen? Márquenla con una (✓).

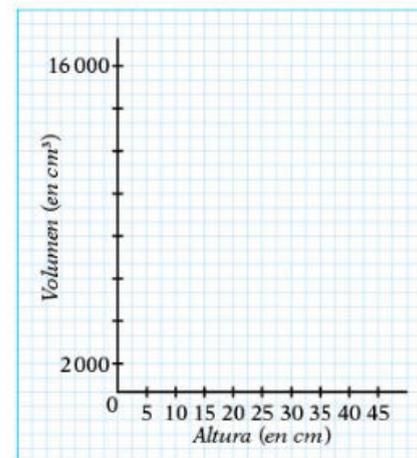
$y = ax$

$y = ax^2$

$y = ax^2 + bx$

$y = ax^2 + bx + c$

f) Completen la gráfica de la función que relaciona altura y volumen.



g) ¿La gráfica es una recta o una curva? ¿Por qué?



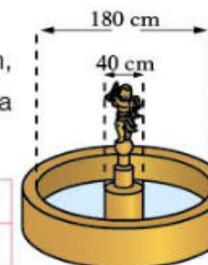
Coordinados por su profesor, expongan y argumenten en el grupo las respuestas de los equipos. Registren en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

#### Actividades adicionales

1. En el centro de una fuente hay una escultura montada sobre una base cilíndrica, de modo que la superficie del agua adquiere la forma de una corona circular. Las dimensiones de la fuente se indican en la figura. Supón que empieza el proceso de llenado.

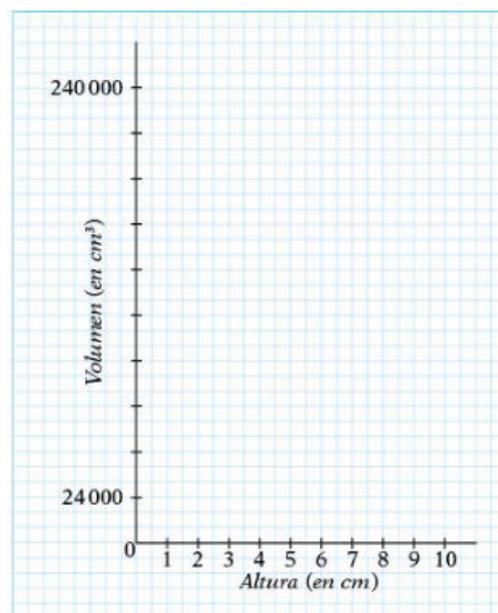
a) ¿Qué volumen de agua hay en la fuente cuando el nivel es de 1 cm, 2 cm, 3 cm? Completa la siguiente tabla, que relaciona la altura y el volumen de agua.

Altura, $x$ (cm)	0	2	4	6	8	10
Volumen, $y$ (cm³)						





- b) ¿Cuál es la función que relaciona el volumen ( $y$ ) de agua que hay en la fuente para cualquier altura  $x$ , entre 0 y 10 cm? ¿La función es lineal o cuadrática? Discute tu respuesta con un compañero.
- c) Completen la gráfica siguiente de la relación altura-volumen.



- d) ¿La gráfica es una recta o una curva? ¿Por qué?



Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo sus respuestas a las preguntas anteriores. Registren en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

2. Desde que una escuela secundaria fue equipada con servicio de internet, el número de usuarios es cada vez mayor. La siguiente tabla muestra el crecimiento mensual del número de usuarios:

Número de mes, $x$	0	1	2	3
Número de usuarios, $y$	0	2	8	18



- a) ¿De qué manera puedes usar el método de diferencias estudiado en la lección 21, para encontrar la expresión algebraica de la función que relaciona el número de mes y el número de usuarios? ¿Cuál es esa función? Discute con un compañero tu respuesta.
- b) Utilicen la expresión que obtuvieron para completar la tabla que representa la relación entre el número de usuarios y el número de mes.

Número de usuarios, $y$	0	1	2	3	4	5	6
Número de mes, $x$	0	2	8	18			



- Observa los videos "La función lineal y la función exponencial" y "Decrecimiento exponencial" para reconocer las situaciones que se modelan mediante funciones lineales y cuadráticas:

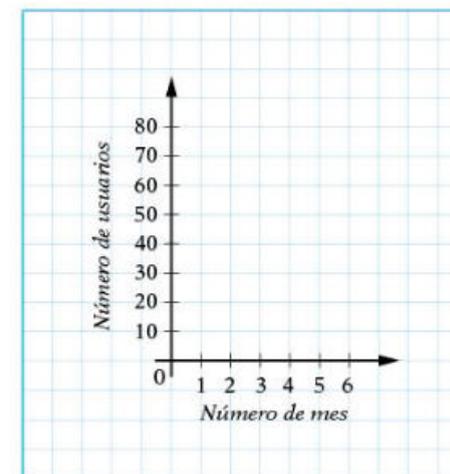
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/1791>
- <http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/4/1793>

- Utiliza los recursos que se proponen para estudiar cómo identificar y resolver una relación funcional lineal o cuadrática:

- <http://matematicasmodernas.com/funciones-lineales-y-cuadraticas/>

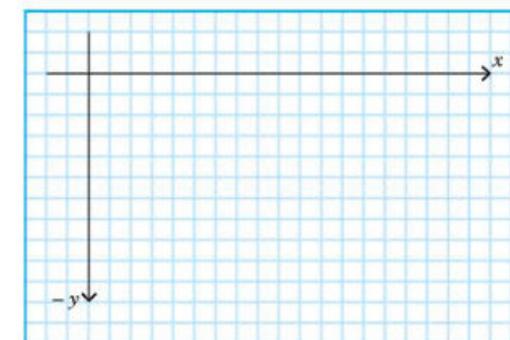
(Fecha de consulta: 24 de enero de 2017)

- c) En el siguiente plano cartesiano, tracen la parábola que representa esta relación.



3. Se deja caer una piedra en un pozo. Traza la gráfica que describe su movimiento, sabiendo que la ecuación de la parábola es  $y = 5x^2$ , en la que  $x$  es el tiempo medido en segundos, y  $y$  representa los metros descendidos por la piedra.

Tiempo	Distancia
( $x$ )	( $y$ )
0	
1	
2	
3	
4	



- a) ¿Cuántos metros desciende la piedra durante el primer segundo? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuántos metros habrá descendido la piedra a los 2 segundos de haber sido soltada? \_\_\_\_\_
- c) ¿La piedra recorre la misma distancia durante el primer segundo que durante el siguiente? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cuál es la profundidad del pozo, si la piedra ha tardado exactamente 2.5 segundos en recorrerlo? \_\_\_\_\_ Discute tus respuestas con un compañero. En caso de que sus respuestas no coincidan, argumentenlas para llegar a un acuerdo.



Coordinados por su profesor, expongan y expliquen en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones del grupo.

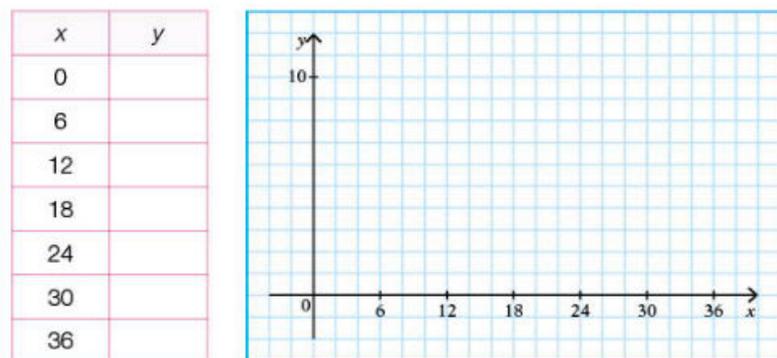
32.2. Actividades sobre variación lineal o cuadrática

1. Al patear con cierta fuerza un balón de fútbol, su trayectoria describe una parábola.

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a este movimiento, si se sabe que la distancia horizontal recorrida por el balón fue de 36 m? Márcala con una (✓). En cada caso, supón que  $x$  es la distancia recorrida, y  $y$  es la altura que alcanza sobre el suelo.

$y = \frac{x^2}{36} + x$         $y = \frac{x^2}{36} - x$         $y = x - \frac{x^2}{36}$

b) Elabora la tabla de valores y traza la gráfica para la ecuación que elegiste.



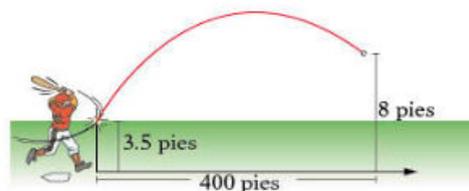
- c) ¿La tabla y la gráfica que elaboraste muestran que el balón vuelve a tocar el suelo a 36 m del punto en que fue pateado?  
 d) ¿Cuál es altura máxima que alcanza el balón?  
 e) ¿A qué distancia sobre la horizontal, desde el punto en que fue pateado el balón, puede estar éste, si sabemos que se localiza a una altura de 8 m? Discute y argumenta tus respuestas con un compañero para llegar a acuerdos.

2. Juan Rompebaldas bateó la pelota a 3.5 pies de altura, y la manda a volar hacia el jardín central describiendo una curva que es casi una parábola, cuya ecuación es:

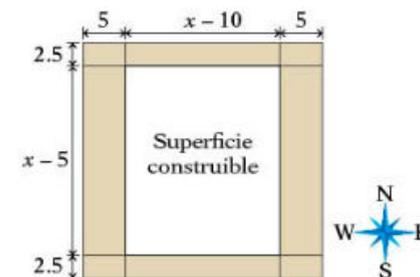
$$h = 0.005x^2 - 2x + 3.5$$

donde  $x$  es la distancia horizontal (en pies) que recorre la pelota desde la caja de bateo, y  $h$  es la altura (en pies) que alcanza la pelota en cada instante.

- a) ¿Qué ecuación cuadrática permite calcular la distancia horizontal que habrá recorrido la pelota cuando alcanza una altura de 8 pies? ¿Cuál es la distancia recorrida?  
 b) Las soluciones de la ecuación cuadrática anterior representan dos momentos en que la pelota está a 8 pies de altura. ¿Cuál solución representa el primer momento y cuál el segundo? ¿Por qué? Discute y argumenta tu respuesta con un compañero.



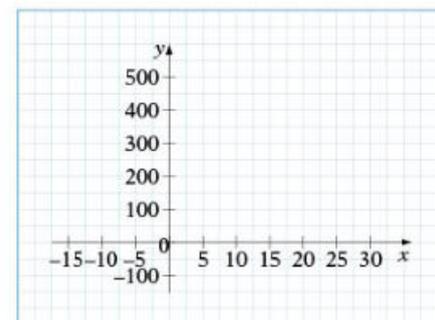
- c) Para que Juan Rompebaldas se haya “volado la barda”, la pelota deberá recorrer al menos 400 pies. ¿Lo habrá logrado el pelotero?  
 3. Luis quiere comprar un terreno cuadrado para construir una casa. Por indicaciones del municipio, debe dejar un espacio de 5 m en los extremos este y oeste, y 2.5 m en los extremos norte y sur. La siguiente figura representa esta situación.



- a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la superficie ( $y$ ) del rectángulo construible, en función de la longitud ( $x$ ) del lado del terreno cuadrado? Discute tu respuesta con tu compañero.  
 b) Escriban la función cuadrática en la forma  $y = ax^2 + bx + c$ .  
 c) Utilicen la función cuadrática que obtuvieron para completar la tabla siguiente, que representa la relación de la longitud  $x$  del lado del terreno cuadrado y el área y del terreno rectangular construible.

Medida del lado ( $x$ ) del cuadrado, en m	-15	-10	-5	0	5	10	20	25	30
Área del terreno rectangular ( $y$ ), en $m^2$									

d) En el siguiente plano cartesiano, tracen la parábola que representa esta relación.



- e) ¿Qué zona de la gráfica es aplicable al problema del terreno de Luis? ¿Por qué?



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo sus respuestas a las actividades anteriores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones grupales.

Para la siguiente sesión requieres traer un dado.

## Juegos de azar

¿Quién no ha jugado en casa o en la kermés de la escuela a la lotería, los dados, los volados o a la ruleta? En muchos de esos juegos, algunos participantes tienen más posibilidades de ganar que otros. Por ejemplo, al lanzar tres monedas al aire, ¿quién tiene más posibilidades de ganar: el que dice que sólo sale un águila, o el que dice que salen tres águilas o tres soles?

Te recomendamos la lectura

"El inicio de la Probabilidad", en Bosch, C. et al., Una ventana a la incertidumbre, México, Santillana, 2002b.

### 33.1. Reconocimiento de juegos justos

#### Problema inicial

Un juego para dos personas. Reúnete con un compañero para jugar a los dados. Para este juego necesitarán un dado, que lanzarán por turnos. Cada jugador deberá elegir uno de los siguientes eventos:

- A: "cae un número mayor que 4"
- B: "cae un número igual o menor que 4"

Cada vez que se lance el dado, gana un punto el jugador que eligió el evento que ocurra.

Si tú elegiste el evento "cae un número mayor que 4", ¿quién supones que gane más juegos: tú (jugador A) o tu compañero (jugador B)? ¿Por qué?

#### Exploración y discusión

- a) Junto con tu compañero, contesten lo siguiente: ¿cuántas caras tiene el dado? ¿Con cuáles ganas tú? ¿Con cuáles gana tu compañero?
- b) Lancen el dado 10 veces y registren los resultados en una tabla como la siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
A: "cae un número mayor que 4"		
B: "cae un número igual o menor que 4"		
	Total de juegos realizados	10

- c) ¿Quién fue el ganador?
- d) En tu equipo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que gane el jugador A? ¿Y de que gane el jugador B?

- e) Reúnan los resultados del grupo y preséntenlos en una tabla como la siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
A: "cae un número mayor que 4"		
B: "cae un número igual o menor que 4"		
	Total de juegos realizados	

- f) ¿Cuántos juegos se jugaron en total en el grupo? ¿Cuántos ganaron los jugadores A? ¿Y los jugadores B?
- g) En el grupo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que gane el jugador A? ¿Y de que gane el jugador B?
- h) Si vuelven a jugar, ¿qué equipos suponen que ganarán: los A o los B?
- i) ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse al lanzar un dado?
- j) De todos esos resultados, ¿con cuántos ganas tú? ¿Y con cuántos de ellos gana tu compañero?
- k) ¿Cuál es la probabilidad teórica de que ganes tú? ¿Y de que gane tu compañero?

En un juego justo o equitativo, todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.

- l) Según la probabilidad teórica que obtuvieron, ¿alguno de los jugadores tiene más posibilidades de ganar que el otro?



Coordinados por su profesor, propongan en el grupo cuáles podrían ser los eventos del juego para que las probabilidades de ganar fueran iguales para los dos jugadores. Anoten en sus cuadernos las conclusiones a que se llegó en el grupo.

#### Actividades adicionales



- 1. Ahora van a cambiar las reglas del juego:

- C: "cae un número mayor que 3"
- D: "cae un número igual o menor que 3"

El ganador de cada juego se anota un punto.

- a) Si tú ganas cada vez que ocurre en evento C, ¿quién supones que gane más juegos: tú o tu compañero? ¿Por qué?

- b) ¿Con qué resultados del dado ganas? \_\_\_\_\_ ¿Con cuáles gana tu compañero? \_\_\_\_\_
- c) Lancen el dado 10 veces y registren los resultados en una tabla como la siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
C: "cae un número mayor que 3"		
D: "cae un número igual o menor que 3"		
Total de juegos realizados		10

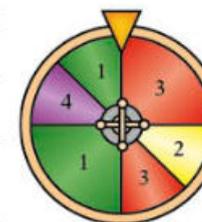
- d) ¿Quién fue el ganador? \_\_\_\_\_
- e) En tu equipo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que caiga un número mayor que 3? \_\_\_\_\_ ¿Y de que sea igual o menor que 3? \_\_\_\_\_
- f) Reúnan los resultados del grupo y preséntenlos en una tabla como la siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
C: "cae un número mayor que 3"		
D: "cae un número igual o menor que 3"		
Total de juegos realizados		

- g) ¿Cuántos juegos se jugaron en total en el grupo? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos ganaron los jugadores C? \_\_\_\_\_ ¿Y los jugadores D? \_\_\_\_\_
- h) En el grupo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que gane el jugador C? \_\_\_\_\_ ¿Y de que gane el jugador D? \_\_\_\_\_
- i) Si vuelven a jugar, ¿volverían a ganar los mismos jugadores? \_\_\_\_\_ ¿En qué razones basan su respuesta? \_\_\_\_\_
- j) De acuerdo con la probabilidad teórica de cada evento, ¿hay algún jugador que tenga mayor probabilidad de ganar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- k) Comparen la probabilidad teórica de los eventos A, B, C y D. ¿Cuál de los dos juegos es equitativo o justo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. ¿Cuáles de los siguientes juegos son equitativos? Márquenlos con una (✓). ¿Cuáles no lo son? Márquenlos con una (✗).

- Se lanzan dos monedas al aire. El jugador A gana si caen caras diferentes. El jugador B gana si caen caras iguales.
- Se lanzan dos monedas al aire. El jugador A gana si cae al menos un sol. El jugador B gana si no cae ningún sol.
- Cuatro jugadores se numeran del 1 al 4. Se gira una ruleta como la de la derecha. Gana el jugador que tiene el mismo número en que se detiene la ruleta.



3. Luis y María juegan con un grupo de tarjetas numeradas del 1 al 10. Seleccionan dos de ellas azar. Luis gana cada vez que la suma de los números impresos en las tarjetas es par, y María, si la suma es impar. ¿Es equitativo este juego?

- a) ¿Cuántos resultados posibles hay en este juego? Utilicen el siguiente cuadro de doble entrada para realizar el conteo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

- b) ¿Cuántos resultados son favorables a Luis?
- c) ¿Cuántos resultados son favorables a María?
- d) ¿Es equitativo este juego?
- e) ¿Cuál de los dos amigos tiene más posibilidades de ganar?

4. Rocío y Javier juegan con dos cajas: una blanca, en la que hay dos esferas de idéntico tamaño, pero cada una con un número distinto, 1 o 2, y una caja de color negro, que contiene cuatro esferas numeradas del 3 al 6. El juego consiste en extraer al azar una esfera de la caja blanca y después una de la negra, y ver la diferencia entre los números que salen. Rocío gana si la diferencia entre los dos números es 1 y Javier si la diferencia es 2.

- a) ¿Cuántos resultados son favorables Rocío?
- b) ¿Y a Javier?
- c) ¿Es equitativo este juego?
- d) ¿Quién de los dos amigos tiene más posibilidades de ganar?



Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo las conclusiones a que llegó cada equipo sobre estas actividades.

### 33.2. Cómo se vuelve equitativo un juego de azar

#### Problema inicial



Un juego para dos personas. Reúnete con un compañero para jugar ahora con una bolsa de canicas.

Para este juego necesitan meter, en una bolsa opaca, tres canicas rojas y dos negras, todas del mismo tamaño. Cada jugador deberá elegir uno de los siguientes eventos:

- A: "salen dos canicas del mismo color"
- B: "salen dos canicas de distinto color"

Ahora, por turnos, cada jugador sacará, sin ver, una canica, registrará su color y la devolverá a la bolsa; sacar otra canica. Si ocurre el evento que elegiste, ganas un punto; en caso contrario, el punto es para el otro jugador. Se devuelven las canicas y el turno es del otro jugador. Se continúa así hasta completar 10 juegos.

¿Qué jugador prefieres ser: el que elige el evento A o el que elige el B?  
¿Es equitativo este juego? Si no lo es, ¿qué cambios harían para que lo fuera?

#### Exploración y discusión



a) Registren sus resultados en la tabla siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
A: "salen dos canicas del mismo color"		
B: "salen dos canicas de distinto color"		
Total de juegos realizados		10

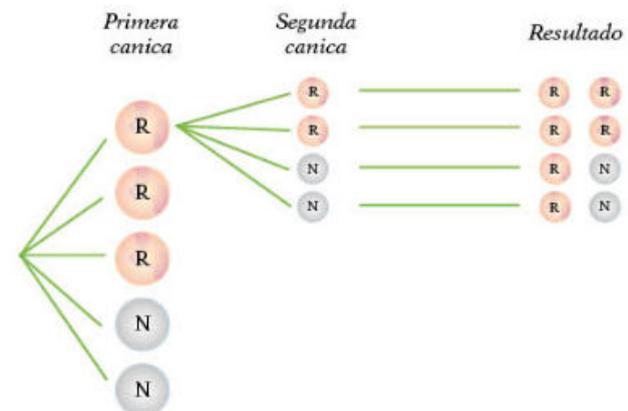
- b) ¿Quién fue el ganador?
- c) En tu equipo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que gane el jugador A?  
¿Y de que gane el jugador B?
- d) Reúnan los resultados del grupo y preséntenlos en una tabla como la siguiente:

Jugador	Conteo de juegos ganados	Total de juegos ganados
A: "salen dos canicas del mismo color"		
B: "salen dos canicas de distinto color"		
Total de juegos realizados		

- e) En el grupo, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que gane el jugador A?  
¿Y de que gane el jugador B?

Aun cuando en el grupo haya ganado cualquiera de los jugadores, no sabemos si el juego es equitativo o no. Para saberlo, podemos contar todos los resultados posibles y determinar cuántos de ellos favorecen a un jugador y cuántos al otro.

- f) Copien en su cuaderno el siguiente diagrama de árbol. Complétenlo para saber cuántos son los resultados posibles al sacar dos canicas de la bolsa.



- g) ¿Cuántos resultados posibles son en total? ¿En cuántos de ellos, el par de canicas son del mismo color? ¿En cuántos son de diferente color?
- h) ¿Cuál es la probabilidad teórica del evento "salen dos canicas del mismo color"?
- i) ¿Cuál es la probabilidad teórica del evento "salen dos canicas de distinto color"?
- j) De acuerdo con la probabilidad teórica, ¿es equitativo este juego? Si no lo es, y queremos que lo sea, ¿cuántas canicas de cada color debe haber en la bolsa?
- k) Si fueran una canica roja y tres blancas, ¿el juego sería equitativo?
- l) Dibujen un diagrama de árbol para realizar el conteo de los resultados posibles y encuentren la probabilidad clásica de los eventos:
  - "Salen dos canicas del mismo color"
  - "Salen dos canicas de diferente color"



Los juegos de azar pueden realizarse utilizando objetos como canicas, dados, monedas, cartas, ruletas, etcétera. ¿Qué puede hacerse para saber si un juego de azar es equitativo? Con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo sus respuestas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones grupales que obtengan.

Actividades adicionales

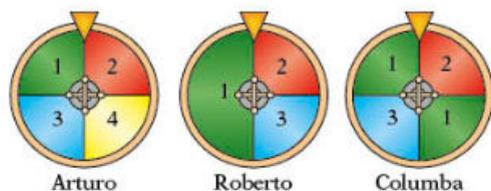


1. Analiza con un compañero el siguiente juego de azar: en una bolsa hay dos canicas rojas y dos blancas, y en otra, dos rojas y seis blancas; deben sacarse dos canicas consecutivamente de ellas; los eventos son:

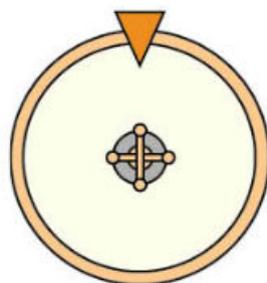
- A: "salen canicas del mismo color"
- B: "salen canicas de distinto color"

¿Con cuál de las dos bolsas se jugaría un juego equitativo? \_\_\_\_\_ ¿En qué argumentos basan su respuesta? \_\_\_\_\_

2. Tres amigos: Arturo, Roberto y Columba, van a jugar a la ruleta. La siguiente ilustración muestra la que ha elegido cada uno de ellos. Cada uno girará 20 veces su ruleta, y ganará el que más veces obtenga el número 1.



- a) ¿Qué ruleta elegirías tú? \_\_\_\_\_
- b) ¿Quién de ellos supones que gane menos juegos? \_\_\_\_\_ Discute tu respuesta con un compañero.
- c) Comparen la ruleta de Arturo con la de Roberto. ¿Quién tiene más oportunidades de ganar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- d) Comparen las ruletas de Roberto y Columba. ¿Alguno de ellos tiene más oportunidades de ganar que el otro? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener 1 en cada una de las ruletas? \_\_\_\_\_
- f) ¿Consideran que el juego es equitativo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- g) ¿Cuál de las tres ruletas habría que sustituir por otra para que el juego sea equitativo? \_\_\_\_\_
- h) Usen la figura para dibujar la ruleta que podría sustituir a la que se va a suprimir.

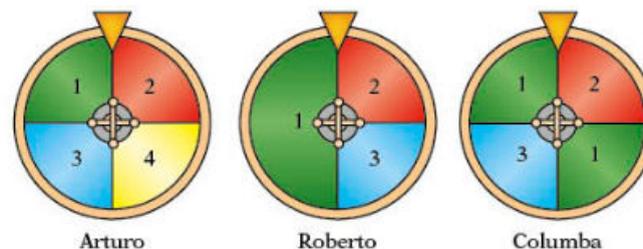


Con la ayuda de su profesor, expliquen en el grupo las conclusiones a que llegó cada equipo sobre estas dos actividades.

33.3. Los premios de los juegos de azar

Problema inicial

Arturo, Roberto y Columba decidieron seguir jugando cada uno con su ruleta. El juego es el mismo: por turnos giran su ruleta y se va anotando un punto aquel cuya ruleta se detiene en el número 1. Quien complete primero 20 puntos gana el juego.



¿Es justo que el premio (1 punto) sea igual para todos cada vez que ganen?

¿Cuántos puntos deberían dársele a Arturo cada vez que gane para que el juego sea justo? \_\_\_\_\_

Exploración y discusión

- a) ¿Cuál es la probabilidad teórica de que al girar Columba su ruleta, ésta se detenga en el 1? \_\_\_\_\_
- b) Compara esa probabilidad con la de Roberto. ¿Son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_
- c) ¿Es justo que el premio sea igual para Roberto y Columba cada vez que ganen? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- d) Ahora compara la probabilidad de ganar de Arturo con la de Columba. ¿Son iguales o diferentes? \_\_\_\_\_
- e) ¿Es justo que Arturo obtenga sólo un punto cada vez que gane? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Discute tu respuesta con un compañero apoyándola en argumentos.



¿Cuál sería un premio justo para Arturo por cada vez que gane? \_\_\_\_\_ Discutan su respuesta en su equipo; después, con la ayuda de su profesor, presenten en el grupo sus respuestas. Anoten en el siguiente recuadro las conclusiones obtenidas en el grupo.

Actividades adicionales

- Pepe y Blanca juegan otra vez a los volados, pero ahora con tres monedas. Las lanzan al aire. Si caen las tres caras iguales, Pepe se anota un punto; en cualquier otro caso, Blanca se anota un punto. Gana el primero que llegue a 30 puntos.



a) ¿Es equitativo el juego? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Discute tu respuesta con un compañero sustentándola en argumentos.

Hay dos maneras de volver equitativo un juego de azar que no lo es:

- Cambiando las reglas del juego, de modo que no favorezcan a ningún jugador.
- Cambiando el importe del premio, de modo que se compensen las desventajas.

b) Si no lo es, ¿cuántos puntos deben ganar Pepe y Blanca cada vez que ganen un juego? \_\_\_\_\_

- Pepe y Blanca juegan a los volados, ahora con dos monedas. Las lanzan al aire consecutivamente. Si caen dos águilas, Pepe se anota un punto; en cualquier otro caso, Blanca se anota un punto. Gana el primero que llegue a 30 puntos.

- ¿Es equitativo el juego? \_\_\_\_\_
- Si no lo es, ¿qué cambios se podrían hacer en las reglas para volverlo equitativo? \_\_\_\_\_
- Si se quiere volverlo equitativo cambiando el importe del premio, ¿cuántos puntos debe obtener cada uno cada vez que gane un juego? \_\_\_\_\_



Coordinados por su profesor, presenten en el grupo sus respuestas a las dos actividades anteriores, así como las razones en que las sustentan. Anoten en el siguiente recuadro las conclusiones obtenidas en el grupo.

PROYECTO DEL BLOQUE

Construir recipientes de diferentes formas y capacidades

Elaboren en equipo algunos envases cuya capacidad sea, por ejemplo, de un litro, de medio litro o de un cuarto de litro, y que tengan forma de prisma.

Para decorar sus envases, pueden aplicar el diseño de teselado que realizaron en el bloque II. Armen los envases, determinen la capacidad de cada uno e identifiquenla con una etiqueta. Organicen una exposición donde presenten todos los recipientes que crearon.

EVALUACIÓN

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Núm. de lista \_\_\_\_\_



- Colorea el alvéolo con la respuesta correcta en cada caso.

- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones no tiene solución?

- $x + 2y = 15$   
 $2x + y = 12$
- $3x + y = 25$   
 $x + y = 15$
- $x + y = 10$   
 $x - y = 4$
- $x + y = 20$   
 $x + y = 10$

- El largo de un rectángulo mide 7 cm más que el ancho; el área del rectángulo es  $120 \text{ cm}^2$ . ¿Con cuál de las siguientes ecuaciones hallamos las dimensiones del rectángulo?

- $x + (x + 7) + x + (x + 7) = 120$
- $x + x + 7 = 120$
- $x(x + 7) = 120$
- $(x + 7)^2 = 120$

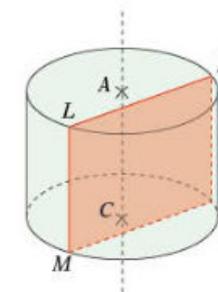
- En una tienda de ropa, 2 camisas y 1 pantalón cuestan \$ 600.00, y 1 camisa y 2 pantalones cuestan \$ 675.00. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta?

- 1 camisa y 1 pantalón cuestan \$ 425.00.
- 3 camisas y 2 pantalones cuestan \$ 1 025.00.
- 2 camisas y 3 pantalones cuestan \$ 1 200.00.
- 3 camisas y 3 pantalones cuestan \$ 1 275.00.

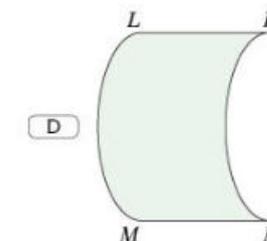
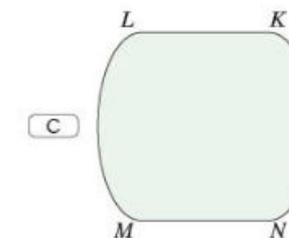
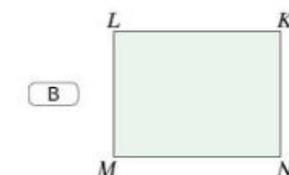
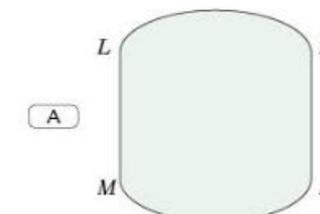
- La ecuación cuadrática  $x(x + 3) = 70$  tiene dos soluciones. La menor de ellas es:

- 7
- 10
- 14
- 35

- La figura representa un cilindro de eje AC que ha sido cortado por un plano paralelo al eje AC.



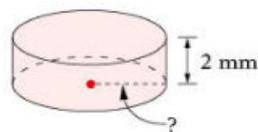
¿Cuál de las siguientes figuras es la representación plana de ese corte?



6. Un bote cilíndrico mide 20 cm de diámetro de la base y 30 cm de altura. ¿Cuál es su capacidad aproximada? (Recuerda que  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$ .)

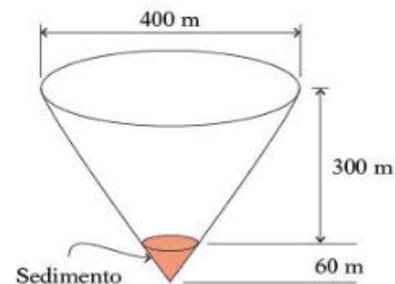
- A 8 litros
- B 8 y medio litros
- C 9 litros
- D 9 y medio litros

7. Un fabricante desea producir pastillas medicinales que contengan  $56.52 \text{ mm}^3$  de medicamento. Si la forma de cada pastilla será un cilindro de 2 mm de altura, ¿cuál deberá ser el radio de la base?



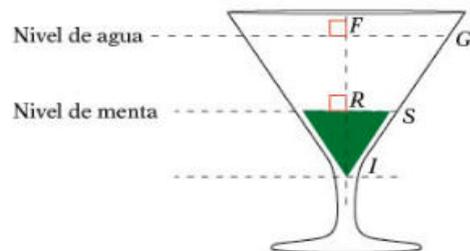
- A 1.26 mm
- B 2 mm
- C 3 mm
- D 3.13 mm

8. El cráter de un volcán tiene la forma de un cono de revolución de 400 m de diámetro y 300 m de profundidad. El fondo está lleno de sedimentos que alcanzan una altura de 60 m. ¿Cuál es el área de la superficie de los sedimentos del fondo del cráter?



- A  $1256 \text{ m}^2$
- B  $2512 \text{ m}^2$
- C  $2728 \text{ m}^2$
- D  $3488 \text{ m}^2$

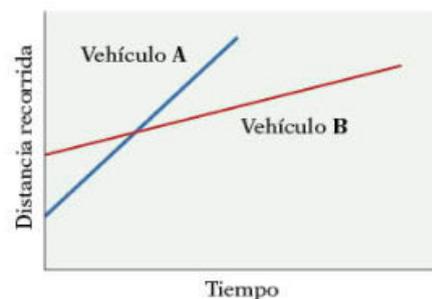
9. En un vaso cuyo interior tiene la forma de un cono de revolución se vierte jarabe de menta hasta alcanzar la altura  $IR$ , y después se le agrega agua hasta la altura  $IF$ .



Si  $RS = 2 \text{ cm}$ ,  $FG = 5 \text{ cm}$  y el volumen total es de  $210 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es la altura  $IR$  del jarabe?

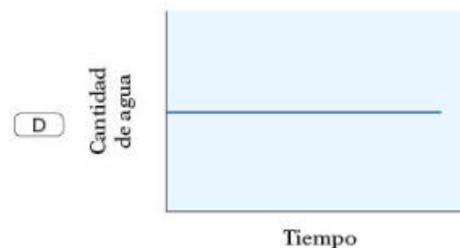
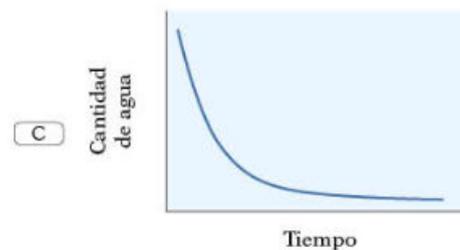
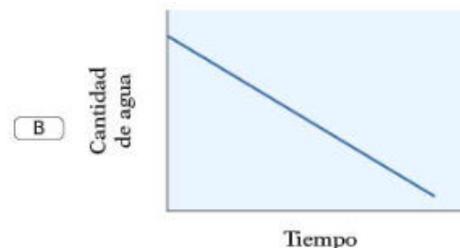
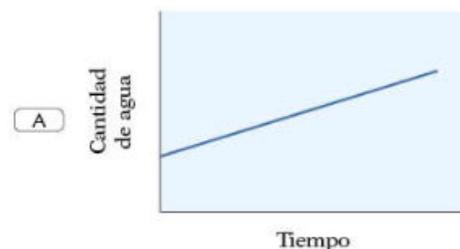
- A 2.5 cm
- B 2.8 cm
- C 3 cm
- D 3.2 cm

10. La siguiente gráfica representa, en un mismo plano, cómo se desplazan dos vehículos. ¿Cómo se distingue en la gráfica que un vehículo va a mayor velocidad que el otro?



- A Por la longitud de las rectas.
- B Por el origen de las rectas.
- C Por la pendiente de las rectas.
- D Por el grosor de las rectas.

11. Un tanque tiene 600 litros de agua. Se abre una llave que expulsa 10 litros por minuto. ¿Qué gráfica representa la cantidad de agua ( $y$ ) que queda en el tanque después de  $x$  minutos de haber sido abierta la llave?



12. Lucy tiene un cono de plastilina de 3 cm de radio y 12 cm de altura. Va a transformarlo en un cilindro que también tenga 3 cm de radio. ¿Qué altura tendrá el cilindro?

- A 3 cm
- B 4 cm
- C 5 cm
- D 6 cm

13. Ernesto y Lorena juegan con dos dados. Lanza los dados al aire; si el producto de los puntos es par, gana Ernesto, y si es impar, gana Lorena. Si por cada juego que gana Ernesto se anota un punto, ¿cuántos puntos debe anotarse Lorena cada vez que gane para que el juego sea justo?

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4

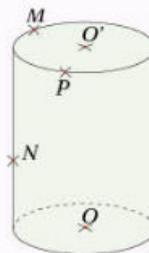
14. Rosita y Lulú juegan con una urna que contiene cinco canicas del mismo tamaño: tres azules (que llamaremos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ ) y dos verdes ( $V_1$  y  $V_2$ ). Sacan dos canicas al azar; si sale una de cada color, gana Rosita, pero si salen dos azules, gana Lulú. Si gana Rosita, se anota un punto. ¿Cuántos puntos debe anotarse Lulú para que el juego sea justo?



- A Medio punto
- B 1 punto
- C  $1 \frac{1}{3}$  puntos
- D 2 puntos

II. Resuelve lo siguiente.

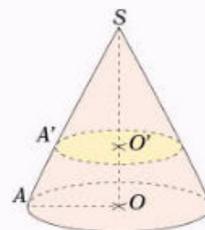
1. Marta tiene un cilindro de eje  $OO'$ ; lo ha cortado por un plano, paralelo a la base, que pasa por  $N$ . Carlos ha cortado otro cilindro, igual al de Marta, por un plano paralelo al eje  $OO'$  que pasa por  $M$  y  $P$ .



- a) ¿Qué tipo de figuras representan la forma de esos cortes. Justifica tu respuesta.

- b) Traza las figuras que sean las representaciones planas de esos cortes.

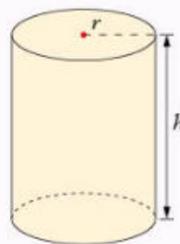
2. Analiza el siguiente cono, cuyas medidas son:  $SO' = 4$  cm;  $SO = 6$  cm y  $OA = 3$  cm (la figura no está a escala).



- a) Traza el triángulo  $SAO$  con sus medidas reales y marca los puntos  $O'$  y  $A'$ .

- b) Traza, con sus medidas reales, la sección plana que se forma al cortar el cono por un plano que pasa por  $O'$  paralelo a la base.

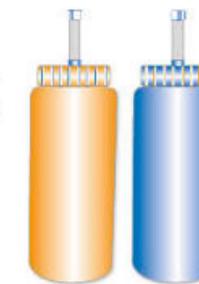
3. ¿Qué representa cada una de las siguientes expresiones en relación con el cilindro que se muestra en la figura?



Expresión	$h$	$r$	$2\pi r$	$2\pi rh$	$\pi r^2 h$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$
Respuesta						

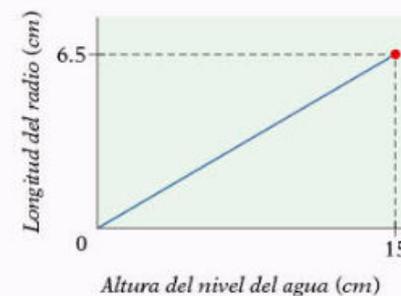
## Termocilindro

Un termocilindro es un bote cilíndrico que mide 13 cm de diámetro de la base y 30 cm de altura. Supón que se está llenando de agua.

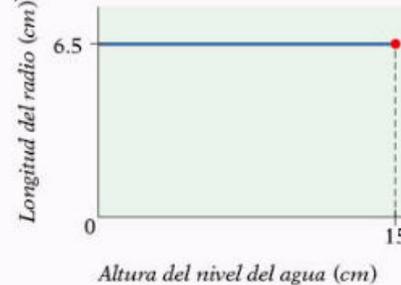


1. ¿Qué gráfica representa la relación entre el nivel del agua y el radio del círculo correspondiente a cada nivel del agua?

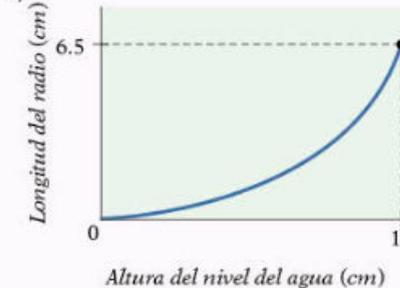
a)



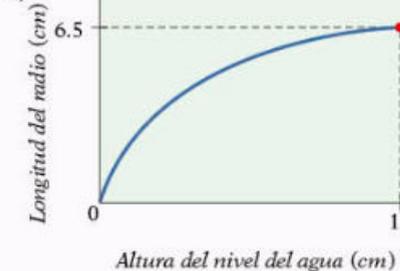
b)



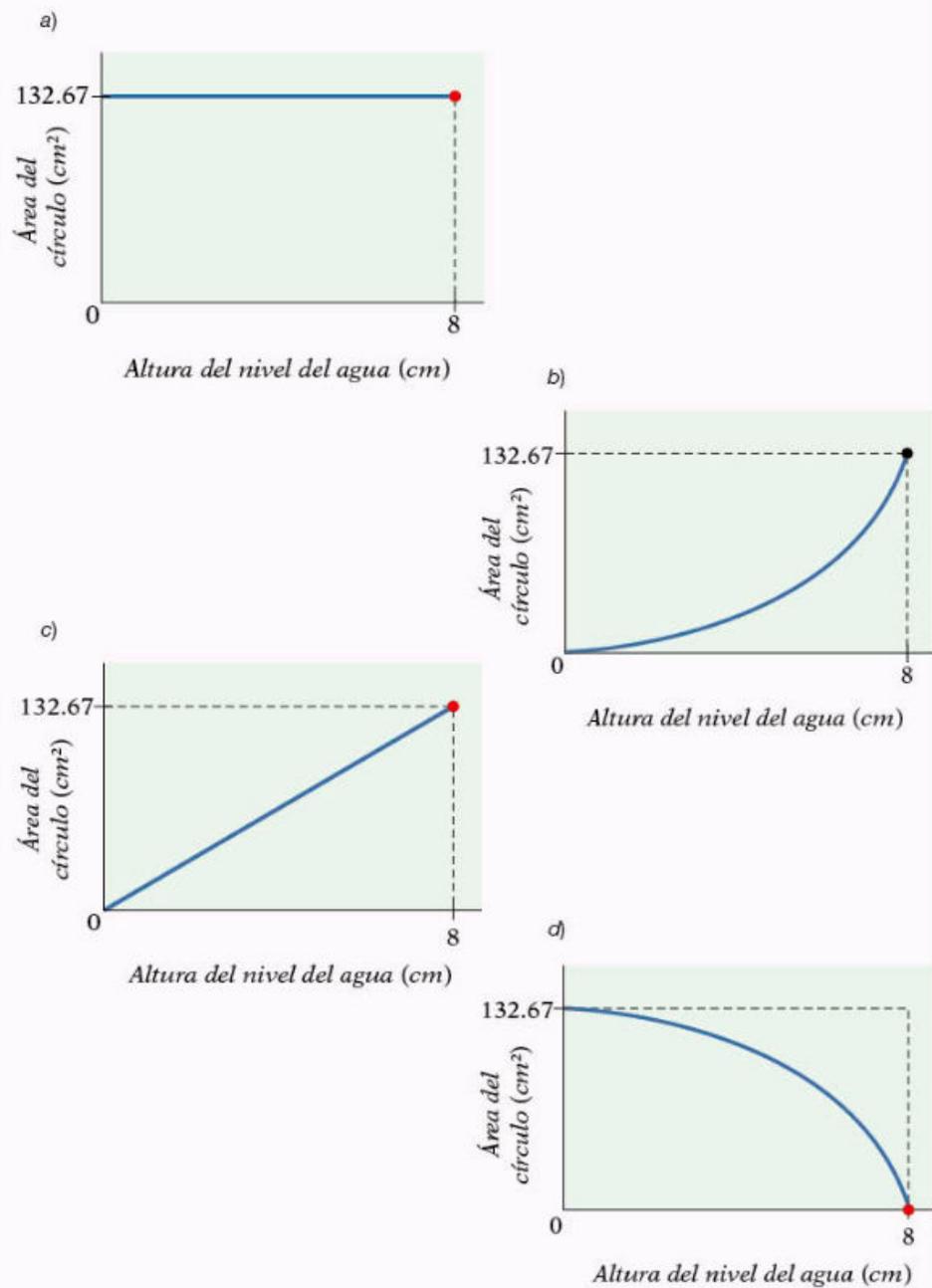
c)



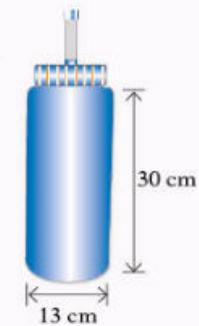
d)



2. ¿Qué gráfica representa la relación entre el nivel del agua y el área del círculo correspondiente a cada nivel del agua?



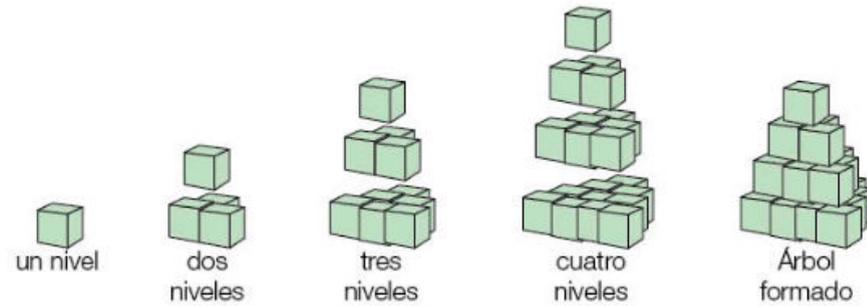
3. Elabora la gráfica y la tabla que representen la relación entre el nivel de agua y el tiempo que tarda en llenarse el bote.



### El árbol de navidad

En épocas navideñas, algunos centros comerciales adornan sus tiendas con estructuras piramidales, simulando árboles de navidad. Dichas estructuras son elaboradas con envases cilíndricos, cúbicos o rectangulares vacíos.

El procedimiento para armarlas se muestra en la siguiente figura.



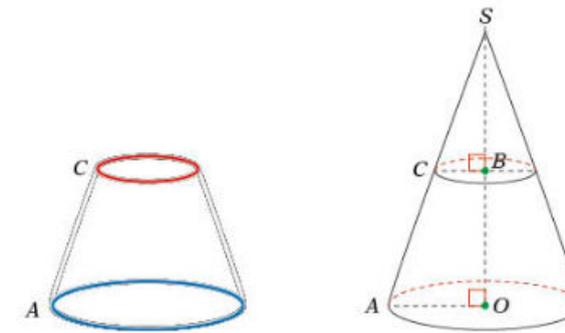
4. ¿Cuántos envases forman la base de una pirámide de 10 niveles de altura? Da una explicación que justifique tu respuesta.

5. La base de una pirámide está formada por 105 envases. ¿Cuántos niveles tiene?

- a) 30      b) 28      c) 15      d) 14

### La pantalla de una lámpara

Se ha construido la estructura de una pantalla para una lámpara a partir de un cono de revolución, como se muestra en la figura.



Las dimensiones del cono son:  $AO = 16$  cm y  $SA = 48$  cm. Además,  $C$  es el punto medio de  $SA$ , y los radios  $CB$  y  $AO$  son paralelos.

La pantalla se ha reforzado con alambres indicados en la figura en color rojo y azul.

6. ¿Cuál de los dos alambres de refuerzo, el rojo o el azul, es más largo? ¿Qué tanto más? Explica tus respuestas.

7. ¿Cuál es la altura de la pantalla

- a) 48 cm      b) 45.26 cm      c) 24 cm      d) 22.63 cm

¿Qué tanto has logrado los aprendizajes esperados? Identifica las situaciones que eres capaz de resolver y márcalas con una (✓). Puedo resolver problemas...

... usando ecuaciones lineales y cuadráticas, como:	
<input type="checkbox"/> La suma de dos números es 82 y su diferencia es 9. ¿Cuáles son los números?	<input type="checkbox"/> El área de un cuadrado es $16n^2$ . ¿Cuál es su perímetro?
... de cálculo del radio de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos a la base en un cono recto, como:	
Un vaso cónico, de 3.6 cm de radio y 12 cm de altura, contiene agua.	
<input type="checkbox"/> ¿Cuál es el radio de la superficie del agua si su altura es de 8 cm?	<input type="checkbox"/> ¿A qué altura está el agua si el radio de su superficie es de 1.5 cm?
... sobre cuestiones relacionadas con la construcción de fórmulas del volumen de cilindros y conos, como:	
<input type="checkbox"/> Explica la obtención de la fórmula del volumen del cilindro a partir de la de un prisma.	<input type="checkbox"/> Explica la obtención de la fórmula del volumen del cono a partir de la de una pirámide.
... de cálculo del volumen de cilindros y conos, como:	
<input type="checkbox"/> Un cilindro tiene 25.12 cm de circunferencia en su base, y la sección plana (un rectángulo) que lo corta por su eje tiene $24 \text{ cm}^2$ de área. ¿Cuál es su volumen?	<input type="checkbox"/> Un cono recto mide 8 cm de radio y la sección plana (un triángulo) que lo corta por su eje tiene un área de $49 \text{ cm}^2$ . ¿Cuál es el volumen del cono?
sobre variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades, como:	
Juan elabora y vende galletas. Paga \$ 500 por la impresión de anuncios. Producir 1 kg de galletas le cuesta \$ 100 y las vende en \$ 130.	
<input type="checkbox"/> Expresa el costo C de x kg de galletas producidas.	<input type="checkbox"/> ¿Para qué valor de x el ingreso es igual al costo?
... sobre juegos de azar justos, como:	
<input type="checkbox"/> Ana y Luis juegan a lanzar dos dados. Si salen números iguales, gana Ana; en caso contrario, gana Luis. Si Luis se anota un punto por cada juego que gana, ¿cuántos puntos debe anotarse Ana cada vez que gane, para que el juego sea justo?	<input type="checkbox"/> Dos jugadores, A y B, lanzan dos dados y calculan la suma de los puntos que caen. Si el resultado es 6, 7, 8 o 9, gana el jugador A; si la suma es cualquiera otra, gana B. ¿Es un juego justo?, ¿por qué? Si es necesario, modifícalo para que sea justo.
Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido con el estudio de este bloque.	Plantea un problema que ahora ya puedas resolver con los conocimientos y habilidades que desarrollaste en este bloque.
1. _____ 2. _____	_____
Escribe un problema planteado en los temas de este bloque, cuya resolución se te haya dificultado.	Cuando en tu equipo un compañero daba una respuesta errónea a un problema propuesto, ¿de qué manera mostraste tu desacuerdo?
_____	_____
_____	_____

## Apéndices

### Construcciones geométricas con ayuda del programa GeoGebra

A lo largo del curso realizamos algunas construcciones geométricas con regla y compás. Veamos ahora cómo la tecnología nos facilita este trabajo. Para mostrarlo, hemos seleccionado *GeoGebra*, un programa computacional que puede descargarse de manera gratuita en internet, en el sitio <[www.geogebra.org/cms/](http://www.geogebra.org/cms/)> (consulta: junio de 2013). La versión que emplearemos aquí es la 4.2. Si requieres ayuda para manejar el programa, puedes visitar: <<http://wiki.geogebra.org/es/>> (consulta: junio de 2013).

Supondremos que ya instalaste el programa *GeoGebra* en la computadora de que dispones. Entonces, para ejecutarlo da dos clics en el icono .

Al abrirse el programa, la interfaz ofrece dos vistas principales de cada objeto matemático: una *Vista Algebraica* (la de la izquierda de la hoja) y una *Vista Gráfica* (a la derecha) (fig. A.1).

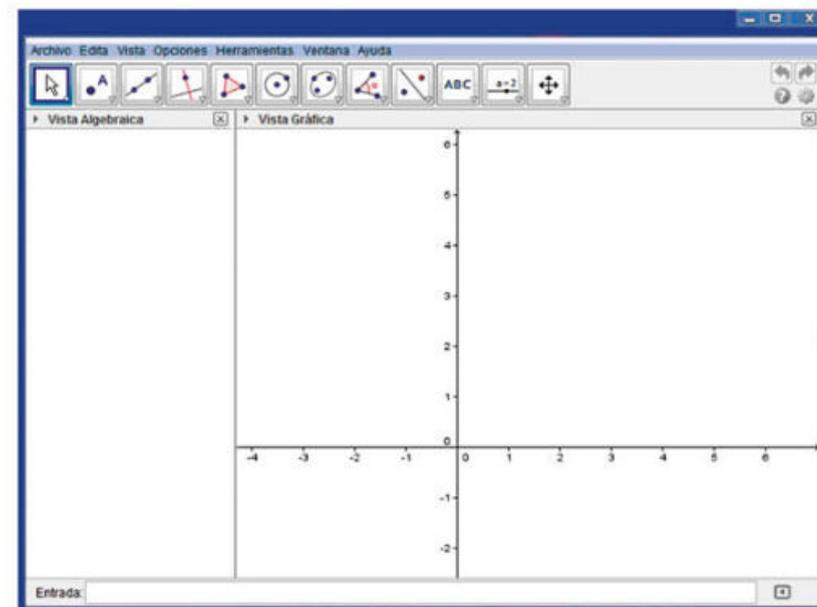


Figura A.1.

Esta propiedad permite apreciar los objetos matemáticos en las mismas representaciones: algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones, funciones...) y gráfica (puntos, polígonos, gráficas de funciones...). Además de estas dos representaciones, es posible mostrar las características de los objetos en celdas de hojas de cálculo. Para ello, se da clic en **VISTA** del menú del programa, y luego se da clic en *HOJA DE CÁLCULO*. Cada representación del mismo objeto se vincula automáticamente y dinámicamente con las otras dos.

En su interfaz más simple, el programa presenta 12 iconos en la barra de herramientas (fig. A.2), cada uno de los cuales tiene un triángulo invertido en la esquina inferior derecha. Al dar clic en el triángulo de un icono se despliega un menú (o "caja de herramientas") (fig. A.3).



Figura A.2.

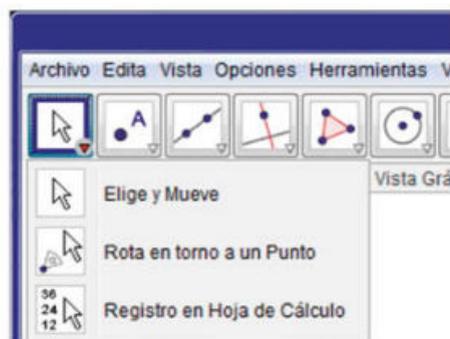


Figura A.3.

A continuación se muestran las cajas de herramientas de cada uno de los iconos:

	Movimiento
	Elige y Mueve
	Rota en torno a un Punto
	Registro en Hoja de Cálculo

	Puntos
	Nuevo Punto
	Punto en Objeto
	Adosa / Libera Punto
	Intersección de Dos Objetos
	Punto Medio o Centro
	Número Complejo

	Rectas
	Recta que pasa por Dos Puntos
	Segmento entre Dos Puntos
	Segmento de Longitud Fija
	Semirrecta que pasa por Dos Puntos
	Poligonal
	Vector entre Dos Puntos
	Vector desde un Punto

	Trazados especiales
	Recta Perpendicular
	Recta Paralela
	Mediatriz
	Bisectriz
	Tangentes
	Recta Polar o Diametral
	Ajuste Lineal
	Lugar Geométrico

	Polígonos
	Polígono
	Polígono Regular
	Polígono Rígido
	Polígono Vectorial

	Círculos y arcos
	Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
	Circunferencia dados su Centro y Radio
	Compás
	Circunferencia dados Tres de sus Puntos
	Semicircunferencia dados Dos Puntos
	Arco de Circunferencia con Centro entre Dos Puntos
	Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos
	Sector Circular con Centro entre Dos Puntos
	Sector Circular dados Tres Puntos de su arco

	Secciones cónicas
	Elipse
	Hipérbola
	Parábola
	Cónica dados Cinco de sus Puntos

 <p><b>Medición</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ángulo</li> <li>Ángulo dada su Amplitud</li> <li>cm Distancia o Longitud</li> <li>cm<sup>2</sup> Área</li> <li>Pendiente</li> <li>{1,2} Crea Lista</li> </ul>	 <p><b>Transformación</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Refleja Objeto en Recta</li> <li>Refleja Objeto por Punto</li> <li>Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión)</li> <li>Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado</li> <li>Traslada Objeto por un Vector</li> <li>Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala</li> </ul>	
 <p><b>Especiales de objetos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ABC Inserta Texto</li> <li>Inserta Imagen</li> <li>Lápiz</li> <li>Bosquejo a Mano Alzada</li> <li>a=b Relación entre Dos Objetos</li> <li>Cálculo de Probabilidades</li> <li>Inspección de Función</li> </ul>	 <p><b>Objetos de acción</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a=2 Deslizador</li> <li>Casilla de Control para Mostrar / Ocultar Objetos</li> <li>OK Inserta Botón</li> <li>a=1 Casilla de Entrada</li> </ul>	 <p><b>Generales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Desplaza Vista Gráfica</li> <li>Zoom de Acercamiento</li> <li>Zoom de Alejamiento</li> <li>Expone / Oculta Objeto</li> <li>AA Expone / Oculta Rótulo</li> <li>Copia Estilo Visual</li> <li>Elimina Objeto</li> </ul>

**Ejemplos de uso de las herramientas**

1. Crear un polígono definido por sus vértices.
  - a) Da clic en el icono **POLÍGONO** ()
  - b) Da un clic por cada uno de los vértices del polígono que quieres trazar.
  - c) Da clic en el primer vértice.
2. Mostrar u ocultar un objeto.
  - a) Traza un polígono cualquiera; por ejemplo, un triángulo.
  - b) Despliega la caja de herramientas del icono **DESPLAZA VISTA GRÁFICA** () y da clic en **EXPONE / OCULTA OBJETO** ()

- c) Da un clic sobre el objeto que trazaste y quieres ocultar. Al seleccionar otra herramienta, el objeto se oculta. Para visualizarlo nuevamente, da clic en el icono .
3. Crear un círculo, dados su centro y un punto de su circunferencia.
    - a) Da clic en el icono **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos** ()
    - b) Da un clic en donde desees ubicar el centro.
    - c) Mueve el ratón en cualquier dirección. Da clic cuando la figura tenga el tamaño deseado.
  4. Crear un círculo, dados su centro y su radio.
    - a) Despliega la caja de herramientas del icono **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos** () y da clic en **CIRCUNFERENCIA DADOS SU CENTRO Y RADIO** ()
    - b) Da un clic en donde desees ubicar el centro.
    - c) Aparece un cuadro de diálogo que te solicita la medida del radio. Escribe el valor que desees.
    - d) Da clic en OK.
  5. Colorear un objeto trazado.
    - a) Da un clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto que quieres colorear.
    - b) Aparece un menú contextual. Da clic en **Propiedades de Objeto...** 
    - c) En el cuadro de diálogo que aparece, selecciona el color y la opacidad de la figura.
  6. Crear una recta que pase por dos puntos.
    - a) Da clic en el icono **Recta que pasa por Dos Puntos** ()
    - b) Da un clic para crear el primer punto y luego otro para crear el segundo.
  7. Crear una semirrecta.
    - a) Despliega la caja de herramientas del icono **Recta que pasa por Dos Puntos** () y da clic en **SEMIRRECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS** ()
    - b) Da clic en el origen de la semirrecta.
    - c) Da clic en el punto por el que pasará la semirrecta.
  8. Crear una recta perpendicular a una recta dada.
    - a) Da clic en el icono **Recta Perpendicular** ()
    - b) Da clic en la recta sobre la cual se trazarla la perpendicular.
    - c) Da clic en el punto por donde pasará la perpendicular.
  9. Crear el punto medio de un segmento dado.
    - a) Despliega la caja de herramientas del icono **NUEVO PUNTO** () y selecciona **PUNTO MEDIO O CENTRO** ()
    - b) Da clic sobre el segmento.

10. Medir la longitud de un segmento.

- Despliega la caja de herramientas del icono Ángulo () y da clic en *DISTANCIA* o *LONGITUD* ().
- Da un clic en cada extremo del segmento.

11. Medir el área de un objeto trazado (polígono, círculo, etcétera).

- Despliega la caja de herramientas del icono Ángulo () y da clic en *ÁREA* ().
- Da clic en el interior del objeto cuya área deseas conocer.

12. Medir un ángulo definido por tres puntos.

- Da clic en el icono Ángulo ().
- Da clic sobre cada uno de los puntos que definen el ángulo, de modo que el segundo clic sea sobre el vértice del ángulo en cuestión. (NOTA: si la medida que aparece es superior a  $180^\circ$ , vuelve a dar clic sobre los mismos tres puntos, pero ahora en sentido contrario.)

13. Trazar un ángulo de una medida dada.

- Traza un segmento *AB*. El vértice del ángulo será el punto *A*.
- Despliega la caja de herramientas del icono Ángulo () y da clic en *ÁNGULO DADA SU AMPLITUD* ().
- Da clic sobre el punto *B* y luego sobre el punto *A*.
- En el cuadro de diálogo, registra la medida del ángulo deseado.
- Da clic en OK.

14. Mover un objeto.

- Da clic en el icono Elige y Mueve ().
- Da clic sobre el objeto que deseas mover y, sin soltar el botón, desplaza el ratón.
- Cuando el objeto esté en el lugar deseado, suelta el botón.

15. Mover el área de trabajo.

- Da clic en el icono Desplaza Vista Gráfica ().
- Da clic sobre el área de trabajo y, sin soltar el botón, desplaza el ratón.
- Suelta el botón cuando veas el sector que deseas del área de trabajo.

Te sugerimos que continúes investigando con otras herramientas para que te vayas familiarizando con su uso.

Para que conozcas un poco más acerca del programa, realizaremos dos actividades. La primera corresponde al contenido 16, "Teorema Tales", y la segunda, al contenido 24, "Razones trigonométricas".

**Actividad 1. ¿Cómo usar GeoGebra para verificar que la proporción entre los segmentos  $\frac{EH}{EF} = \frac{AE}{AD}$  se cumple?**

**Plan de solución.** Primero construiremos un ángulo y luego lo atravesaremos con dos rectas paralelas, de modo que se determinen los segmentos *EH*, *EF*, *EI* y *EG*. Mediremos estos segmentos. Después, moveremos los lados del ángulo para cambiar las medidas de los segmentos. Así podremos verificar si la proporción se mantiene.

**Ejecución del plan:**

A. *Construcción de la figura:*

1. Construcción del ángulo:

- Traza la recta *AB* y después la recta *CD*.
- Coloca el punto *E*, intersección de las rectas *AB* y *CD*.

2. Construcción de las paralelas:

- Coloca el punto *F* sobre la recta *AB* y traza una recta que pase por *F*.
- Coloca un punto en la intersección *G* de las rectas *FG* y *CD*.
- Coloca el punto *H* sobre la recta *AB* y traza la paralela a *FG* que pase por *H*.
- Coloca un punto *I* en la intersección de las rectas *HI* y *CD*.

3. Elaboración de una tabla:

a) Escribe en la columna A los nombres de los datos para establecer la proporción:

- En la celda A1, escribe "Distancia EH" (sin las comillas).
- En A2, "Distancia EF".
- En A3, "Distancia EI".
- En A4, "Distancia EG".
- En A5, "Cociente EH/EF".
- En A6, "Cociente EI/EG".

b) Escribe en la columna B los valores de los datos anotados en la columna A. Por ejemplo, en la celda B1, teclea "EH" (sin las comillas); en la celda aparecerá la longitud del segmento *EH*. Haz lo mismo con los otros tres segmentos. Finalmente, en la celda B5 escribe "B1/B2", y en B6, "B3/B4".

B. *Conjeturas.* Mueve el punto A.

- ¿Varían los valores de *EH*, *EF*, *EI*, *EG*?
- ¿Varía el cociente  $\frac{EH}{EF}$ ? ¿Y el cociente  $\frac{EI}{EG}$ ?
- ¿Son diferentes entre sí estos cocientes al variar valores de *EH*, *EF*, *EI*, *EG*?
- ¿Se mantiene la proporción  $\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG}$ ?

**Actividad 2. ¿Cómo usar GeoGebra para verificar los valores del seno de ángulos agudos?**

**Plan de solución.** Primero construiremos un triángulo rectángulo, en el que identificaremos tanto los catetos adyacente y opuesto al ángulo agudo en cuestión,

como la hipotenusa. Mediremos el cateto opuesto, la hipotenusa y el ángulo agudo. Calcularemos el cociente  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$  para un triángulo rectángulo en particular. Después, moveremos los lados del triángulo para variar la amplitud del ángulo agudo que nos ocupa (y la medida de los lados del triángulo) para, de esta manera, obtener el valor del cociente (seno) que correspondiente a cada ángulo agudo.

### Ejecución del plan:

#### A. Construcción de la figura:

##### 1. Construcción del ángulo agudo:

- Coloca tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y después traza las semirrectas  $BA$  y  $BC$ .
- Mide el ángulo  $ABC$ . Mueve eventualmente el punto  $A$  para que el ángulo  $ABC$  sea agudo.

##### 2. Construcción del triángulo rectángulo:

- Coloca un punto  $D$  sobre la semirrecta  $BA$ , entre los puntos  $A$  y  $B$ . Después, traza la recta perpendicular a la recta  $BC$  que pase por el punto  $D$ .
- Entre los puntos  $B$  y  $C$ , coloca el punto  $E$ , intersección de la perpendicular con la semirrecta  $BC$ .
- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo  $DBE$ ? ¿Cuál es el cateto opuesto al ángulo  $D$ ? ¿Cuál es el cateto adyacente al ángulo  $D$ ? ¿Cuál es la hipotenusa?

##### 3. Elaboración de una tabla:

- Escribe en la columna A los nombres de los datos: "Cateto DE", "Cateto BD" y "Cociente DE/BD".
- Anota en la columna B los valores de los datos anotados en la columna A: en B1, "DE"; en B2, "BD", y en B3, "B1/B2".

#### B. Conjeturas. Mueve el punto A.

- ¿Varían los valores de  $DE$  y  $BD$ ?
- ¿Varía el valor del ángulo agudo  $B$ ?
- ¿Varía el cociente  $\frac{DE}{BD}$ ?
- ¿Son diferentes entre sí estos cocientes al variar los valores de  $DE$  y  $BD$ ?
- ¿Cuál es el valor del cociente cuando el ángulo  $B$  es de  $0^\circ$ ? ¿Y cuando es de  $90^\circ$ ?

Hay muchas otras actividades que puedes realizar con *GeoGebra*; por ejemplo:

- Verificar los valores del coseno y la tangente de ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
- Establecer la relación que existe entre dos triángulos homotéticos.
- Recubrir un plano con triángulos o con cuadriláteros.

## Tabla de razones trigonométricas

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.000

46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7324	0.6820	1.0724
48°	0.7432	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900

## Sugerencias didácticas y de dosificación

### BLOQUE I

#### Contenido 1. Ecuaciones cuadráticas

Debe tomarse en cuenta que la intención didáctica de este apartado es que los alumnos logren construir ecuaciones de segundo grado a partir de las situaciones problemáticas que se les propongan, y que las resuelvan mediante procedimientos informales, como el de ensayo y error, o por otros procedimientos que han utilizado anteriormente al resolver ecuaciones de primer grado. Por ejemplo, si, para resolver un problema propuesto, los alumnos plantean la ecuación  $2x^2 - 15 = 35$ , pueden resolverla aplicando las propiedades de la igualdad. No sólo el profesor debe proponer los problemas; pida a sus alumnos que propongan una diversidad de problemas geométricos o numéricos que puedan resolverse con una misma ecuación cuadrática.

Núm. de sesiones: 3

#### Contenido 2. Construcción de figuras congruentes y figuras semejantes

El propósito de este apartado es que los alumnos reconozcan algunas características de la semejanza y congruencia de figuras geométricas, y que, con base en ellas, resuelvan problemas sencillos. En la selección y desarrollo de las actividades deberá considerarse la congruencia de figuras geométricas como un caso particular de la semejanza. En el caso de la semejanza, la resolución de los problemas tiene como antecedente fundamental la relación de proporcionalidad directa, aunque podrá ligarse también con la resolución de ecuaciones lineales y el uso de representaciones gráficas en el plano cartesiano.

Núm. de sesiones: 4

#### Contenido 3. Criterios de congruencia y de semejanza de triángulos

Las conclusiones sobre congruencia y semejanza de figuras geométricas a las que los alumnos arribaron en el apartado anterior, podrán ser punto de partida para el trabajo en este apartado. El trazo con regla graduada y compás o el uso de algún *software* de geometría dinámica serán muy útiles para que los alumnos construyan y enuncien los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. Los problemas sobre triángulos semejantes no tienen por qué limitarse a los clásicos de lápiz y papel; el tema se presta para que los alumnos planteen y resuelvan problemas en el patio de la escuela o incluso en el entorno escolar.

Núm. de sesiones: 5

#### Contenido 4. Reconocimiento de situaciones de proporcionalidad

El propósito central de este apartado es que los alumnos reconozcan, de entre una diversidad de situaciones, aquellas que son de proporcionalidad directa, ya sea que tales situaciones estén representadas mediante tablas, gráficas, enunciados verbales o expresiones algebraicas. Se trata también de que sean capaces de formular problemas que puedan modelarse con una representación dada. De hecho, este apartado resume muchos de los contenidos estudiados en cursos anteriores.

Núm. de sesiones: 2

#### Contenido 5. Cantidades que varían en relación funcional

Se trata de conceptualizar la variable como parte de una relación funcional; esto es, reconocer que, al variar el valor de la variable independiente  $x$ , varía también el de la variable dependiente  $y$ . Por ejemplo: Se tiene un rectángulo cuyo largo es 4 unidades mayor que el ancho.

- Representar mediante una tabla la relación entre el área del rectángulo y sus posibles dimensiones.
- Si se representa la medida del ancho con la letra  $x$ , ¿cómo se representa la longitud del rectángulo? ¿Cómo se representa el área? ¿Cuál es el valor del área cuando  $x$  es igual a 1, 2, 3, ... unidades? Cuando  $x$  vale 5, el área del rectángulo es 45. ¿Qué valores tomará  $x$  si queremos que el área sea mayor que 45?
- Representar mediante una gráfica la relación entre  $x$  y  $y$ . ¿La gráfica es una recta o una parábola?

Núm. de sesiones: 3

#### Contenido 6. Caracterización de eventos aleatorios

Los alumnos distinguirán entre eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes. Dos eventos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia del otro. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado se definen los eventos  $A =$  "cae un número menor que 3" y  $B =$  "sale un número mayor que 3", si ocurre el evento  $A$ , no es posible que ocurra el evento  $B$ . Los dos eventos complementarios son también mutuamente excluyentes, pero en éstos la suma de sus probabilidades es 1. Finalmente, dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes si la probabilidad del evento  $B$  no es afectada o cambiada por la ocurrencia del evento  $A$ . Por ejemplo, al lanzar una moneda, la probabilidad de que caiga águila (0.5) no cambia, es la misma, aunque anteriormente haya caído varias veces águila.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 7.**  
**Diseño de un estudio o experimento estadístico**

En este apartado, el propósito es que los alumnos, organizados en equipos de dos o tres integrantes, lleven a cabo una investigación estadística, desde la planificación del proceso hasta la presentación de resultados. Se sugiere dedicar una sesión a la selección de la pregunta a la que se quiere dar respuesta. Las preguntas pueden referirse a cantantes, deportistas, deportes, novelas, etcétera, de moda o favoritos, aunque los equipos deberán tener libertad de elección. Aquí, la cuestión más delicada, para que los resultados sean más confiables, es la selección de la muestra. Por ejemplo, suponga que quiere seleccionar una muestra de tamaño  $n$  de una población que contiene  $N$  objetos. Suponga que los  $N$  objetos son todos los alumnos de primer grado, y que se hará la selección de  $n$  de ellos, que pudieran ser el 10 % de  $N$ . Para que la muestra sea aleatoria, podría numerar a todos los alumnos y, por sorteo, elegir ese 10 %. En vez del sorteo, puede emplear números aleatorios, dígitos generados de modo que los valores 0 a 9 ocurran al azar y con igual frecuencia. Estos números se generan en una calculadora científica.

Núm. de sesiones: 3

## BLOQUE II

**Contenido 8.**  
**Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas**

Proponer problemas que den lugar al planteamiento de ecuaciones resolubles por factorización, no asegura que los alumnos vayan a utilizar este método. Es más probable que continúen usando el ensayo y error o algún otro procedimiento. En este caso conviene que sugiera llevar todos los términos al primer miembro de la ecuación y factorizar el polinomio que resulte. También es conveniente aclarar que este método depende de la propiedad del factor cero (el producto de dos números es cero si uno de los factores o ambos son cero), y que esta propiedad determina que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones. Con objeto de que los alumnos consoliden esta técnica de resolución de ecuaciones, se aconseja dedicarle tiempo suficiente a la práctica, ya sea como trabajo en clase o en casa.

Núm. de sesiones: 6

**Contenido 9.**  
**Propiedades de los movimientos en el plano**

El propósito de este apartado es que el alumno reconozca y enuncie, a través del trazo geométrico, las propiedades básicas de la simetría, la rotación y la traslación; esto es, si una figura se transforma mediante alguno de estos movimientos, los lados y los ángulos homólogos se conservan iguales. Podrán también enunciarse otras propiedades, que más bien son corolarios de las propiedades básicas; por ejemplo, la figura simétrica de un ángulo es otro ángulo igual, toda recta cuya prolongación pasa por el centro de simetría coincide con su homóloga, etcétera. De ser posible, puede recurrirse a un *software* de geometría dinámica para realizar los trazos geométricos y la búsqueda de propiedades.

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 10.**  
**Construcción de diseños mediante movimientos en el plano**

En este apartado se pone el énfasis en la realización de actividades en las que los alumnos construyen diseños tomando como base el uso de las propiedades de la simetría, la rotación y la traslación de figuras. Se sugiere empezar utilizando figuras iguales (que pueden ser geométricas) recortadas de cartulinas de color, y colocarlas sobre la mesa para tratar de crear diseños interesantes. Estas mismas actividades pueden realizarse con algún *software* de geometría dinámica.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 11.**  
**El teorema de Pitágoras**

El propósito de este apartado es que los alumnos analicen la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. Para este análisis tomarán como base algunas de las pruebas visuales del llamado *teorema de Pitágoras*. Se procurará que, al final de cada prueba que realicen, los alumnos enuncien verbalmente la relación que encontraron. De ser necesario, al término de estas actividades, el docente podrá exponer la forma general de dicho teorema: En un triángulo rectángulo, cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  unidades, respectivamente, se cumple la relación  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 12. Uso del teorema de Pitágoras**

Hay una diversidad de situaciones problemáticas referidas al entorno físico de los alumnos, que es posible resolver mediante el uso del teorema de Pitágoras, y son los propios alumnos quienes pueden proponerlos, a partir de los conocimientos adquiridos en el apartado anterior. Con este teorema pueden encontrarse algunas propiedades geométricas; por ejemplo, la relación entre la medida de los lados de un triángulo equilátero y su altura, o entre la medida de los lados de un hexágono regular y su apotema.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 13. Problemas sobre cálculo de la probabilidad de eventos**

La resolución de problemas sobre eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios exige la aplicación de la regla de Laplace, por lo que es necesario hacer un recuento de los casos posibles del experimento (espacio muestral) y de los favorables a los eventos considerados. Lo habitual es utilizar diagramas de árbol o tablas de doble entrada, que son relativamente fáciles de construir y tienen la ventaja de exhibir el proceso de formación de las distintas posibilidades que se están contando. En otro apartado ya se dijo la diferencia entre estos tipos de eventos compuestos (ambos son mutuamente excluyentes), pero en los complementarios, la suma de las probabilidades de los eventos es 1.

Núm. de sesiones: 3

## BLOQUE III

**Contenido 14.**  
**La fórmula general cuadrática**

Los problemas que proponga para introducir la fórmula cuadrática deberán dar lugar a ecuaciones para cuya resolución los alumnos no encuentren manera de usar la factorización, pero sí el método de ensayo y error. De este modo se hace necesario presentar la fórmula cuadrática como un método general para resolver cualquier ecuación cuadrática. Aunque, a primera vista, pareciera que con este método sólo se trata de sustituir y operar, se requiere proponer una diversidad de situaciones para que los alumnos logren apropiarse de esta herramienta para resolver problemas. El análisis del discriminante de la fórmula permitirá entender las razones por las que unas ecuaciones cuadráticas tienen dos raíces, otras una sola raíz, y otras más, ninguna.

Núm. de sesiones: 5

**Contenido 15.**  
**Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos**

El concepto de congruencia de triángulos puede utilizarse en la verificación de algunas propiedades de figuras geométricas; por ejemplo, que las diagonales del rombo lo dividen en cuatro triángulos congruentes y que dichas diagonales son perpendiculares. Puede probarse también la falsedad de enunciados como el siguiente: dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto. Lo mismo sucede con la semejanza de triángulos; por ejemplo, que las diagonales de un trapecio forman un par de triángulos semejantes.

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 16.**  
**Teorema de Tales**

Además de propiciar que los alumnos construyan el teorema de Tales mediante el trazo con regla y compás, conviene recurrir a un *software* de geometría dinámica para verificar dicho teorema en casos concretos: "Si los lados de un triángulo son cortados por dos rectas paralelas, la razón de los segmentos situados en uno de los lados es igual a la razón de sus correspondientes en el otro lado". A partir de esos casos, los alumnos pueden proponer y resolver problemas. Esto mismo puede hacerse con el recíproco del teorema de Tales.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 17.**  
**Homotecia**

Una manera de introducir el concepto de homotecia consiste en presentar en el pizarrón un triángulo  $ABC$  y un punto  $O$  fuera de él, trazar los rayos  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$ , hacer corresponder a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del triángulo los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  sobre los rayos  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$ , respectivamente, de tal manera que se cumplan las proporciones:  $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$ , y finalmente trazar el triángulo  $A'B'C'$ . El punto  $O$  es como una fuente de luz artificial, y el triángulo  $A'B'C'$ , como la sombra del triángulo  $ABC$  que se proyecta sobre una pared, si  $ABC$  se mantiene paralelo a la pared. Tomando como base esa figura pueden encontrarse las razones entre las medidas de los lados homólogos de los dos triángulos, que resultan semejantes. Esto mismo puede realizarse mediante el uso de un *software* de geometría dinámica.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 18.**  
**Gráficas de funciones cuadráticas**

Las actividades que se propongan en este apartado pueden tener, como punto de partida, la representación algebraica de la función cuadrática que modela una situación o fenómeno, o la tabla correspondiente o la gráfica. En cada caso, lo que interesa es que los alumnos se apropien de las características de este tipo de funciones y puedan usarlas para modelar otras situaciones o fenómenos. Por ejemplo, una casa comercial ha encontrado que los lápices que se venden a  $x$  pesos dan una ganancia ( $y$ ) en miles de pesos, modelada por la función  $y = -x^2 + 8x - 4$ . ¿Cuál es el precio que da la máxima ganancia y cuál es la ganancia con ese precio?

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 19.**  
**Interpretación de gráficas formadas por secciones rectas y curvas**

En este apartado se retoma la interpretación de gráficas, ahora de forma cualitativa. La importancia del apartado radica en que resalta la creación de modelos que expliquen ciertos hechos. El estudio de estos modelos gráficos se inicia con rectas, por la relativa sencillez con que pueden ajustarse muchas relaciones entre dos variables.

El tema se presta para consolidar conceptos matemáticos previamente estudiados, como el de pendiente y el de ordenada al origen, asociados ahora a un contexto concreto. En el caso de las secciones curvas, se sugiere que la variable independiente sea el tiempo; por ejemplo, interpretar dos gráficas que representan cómo va cambiando, durante un tiempo dado, la temperatura de dos hornos: uno se enciende y se va calentando, y el otro se apaga y se va enfriando. ¿Qué representa el punto de corte de las dos gráficas?

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 20.**  
**Eventos de azar independientes**

El cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes da la oportunidad de confirmar la diferencia entre eventos dependientes y eventos independientes. Recordemos que dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes si la probabilidad de  $B$  no es afectada por la ocurrencia del evento  $A$ , y que su probabilidad es el producto de las probabilidades de los eventos.

Por ejemplo:

- En el experimento de efectuar dos volados, la probabilidad de que en el primero caiga águila y en el segundo caiga sol, es igual a  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  (los eventos son independientes).
- Consideremos ahora el experimento de lanzar dos dados. La probabilidad de que en ambos caigan pares y que la suma sea 8, es  $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ , como podrá verse en la lista del espacio muestral. Por otra parte, la probabilidad de que caigan pares es  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  y la de que la suma sea 8 es  $\frac{5}{36}$ . Ahora bien,  $\frac{1}{4} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{144}$  y  $\frac{5}{144} \neq \frac{1}{12}$ . Esto ocurre porque los eventos son dependientes o no independientes.

Núm. de sesiones: 4

## BLOQUE IV

**Contenido 21.**  
**Sucesiones**

Los alumnos tienen ya alguna experiencia en la obtención de la expresión general lineal para hallar el *n*-ésimo término de una sucesión, incluyendo aquellas sucesiones cuyos primeros términos son números negativos, como:  $-3, -1, 1, 3, 5, \dots$ . Se trata ahora de invitarlos a construir reglas verbales y expresiones algebraicas cuadráticas para determinar el *n*-ésimo término de sucesiones sencillas. Se sugiere empezar proponiendo sucesiones figurativas, en las que el número de elementos de cada término figurativo pueda obtenerse mediante una multiplicación.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 22.**  
**Sólidos con superficies curvas**

El propósito de este apartado es que los alumnos reconozcan las características (bases, cara lateral, radio, diámetro, altura, generatriz, vértice) de los llamados *sólidos de revolución* (en particular, el cilindro y el cono), y que describan la manera en que se generan a partir de un rectángulo y un triángulo rectángulo, respectivamente. En el caso del desarrollo plano del cilindro, que expliquen la relación entre los lados del rectángulo (del desarrollo plano de su cara lateral) y la altura y perímetro de la base del cilindro. Finalmente, en el caso del cono, cuyo desarrollo plano está formado por un sector circular y un círculo, que expliquen la relación entre la parte curva del sector circular y el perímetro de la base del cono.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 23.**  
**Relación entre la pendiente de una recta y la razón tangente**

En este apartado se trata de relacionar un concepto algebraico (pendiente de una recta) con uno geométrico (triángulos rectángulos semejantes). Una primera actividad que se sugiere realizar consiste en representar en el plano cartesiano la gráfica de una función lineal, como  $y = 2x + 1$ ; trazar algunos triángulos rectángulos tomando como hipotenusas algunas secciones adecuadas de la recta; hallar los valores decimales de las razones del cateto opuesto entre el cateto adyacente de esos triángulos rectángulos, para finalmente encontrar que tales razones son muy cercanos a la pendiente (2) de la recta  $y = 2x + 1$ . Los alumnos pueden medir con un transportador el ángulo que forma la recta con el eje horizontal del plano cartesiano y verán que es cercano a  $63^\circ$ . Para verificarlo, pueden consultar el Apéndice "Tabla de razones trigonométricas" de este libro, donde encontrarán que  $\tan 63^\circ = 1.9626$ .

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 24.**  
**Razones trigonométricas**

Dado que los alumnos pueden identificar la equivalencia entre la pendiente de una recta y la tangente del ángulo que forma esa recta con el eje horizontal del plano cartesiano, para que ellos adviertan las constantes al dividir el cateto adyacente y el cateto opuesto entre la hipotenusa de los triángulos rectángulos semejantes que se forman, podría proponerse la representación gráfica de la función  $y = 0.5x + 1$ , obteniendo 0.45 para el primer cociente y 0.89 para el segundo; medir con el transportador el ángulo que forman la recta y el eje de las abscisas ( $27^\circ$ , aproximadamente), y llamar *seno* al primer cociente y *coseno* al segundo. Con esto se tendrían definidas tres razones trigonométricas en el triángulo rectángulo:  $\text{seno } 27^\circ = 0.45$ ,  $\text{coseno } 27^\circ = 0.89$  y  $\text{tangente } 27^\circ = 0.5$ . Pueden consultarse estos valores en el Apéndice de este libro o en una calculadora científica.

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 25.**  
**Uso de las razones trigonométricas**

Para consolidar el significado de las razones trigonométricas se sugiere que presente en la clase un círculo unitario, de modo que los alumnos puedan después también construirlo en cartoncillo y consultarlo para obtener valores aproximados de las razones trigonométricas de cualquier ángulo comprendido entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

Cada alumno puede construir también un goniómetro, de manera que, provistos del círculo unitario, el goniómetro y una cinta métrica, los equipos puedan realizar mediciones indirectas de distancias inaccesibles, que es uno de los usos más sencillos de las razones trigonométricas.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 26.**  
**Razón de cambio**

Hay muchas situaciones que tienen que ver con el concepto de razón de cambio: la velocidad de un objeto (es decir, la rapidez con que se recorre una distancia por unidad de tiempo); la circulación de la sangre dentro del propio cuerpo (que se refiere a la cantidad de sangre que, por unidad de tiempo, pasa por cierta arteria o conjunto de arterias); el crecimiento del capital por mes o por año en una inversión financiera; el aumento de la población por año, etcétera. En todas estas situaciones, lo que cuenta es la rapidez de cambio o razón de cambio. En este apartado, los problemas sobre razón de cambio que se plantean están ligados al concepto de función lineal y, en particular, al de pendiente de una recta; por lo que si lo considera conveniente usted puede reorganizar los contenidos de este bloque.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 27.**  
**Medidas de dispersión de datos**

Ninguna de las medidas de tendencia central da información detallada sobre la forma en que están distribuidos los datos. Con respecto de la moda y la mediana, se ha visto que, por ejemplo, pueden cambiarse tanto como se desee los valores por encima y por debajo de estas medidas sin que éstas se vean afectadas. Igual deficiencia tiene la media; por ejemplo, los números 2, 4 y 6, tomados una vez cada uno, tienen 4 como media, pero también la tienen los números 0, 4 y 8. Entonces para tener un conocimiento más completo del comportamiento de un conjunto de datos también es necesario obtener y analizar medidas que den cuenta de la distribución de los datos.

El propósito de este apartado es que los alumnos reconozcan la necesidad de contar con otras medidas que informen con más detalle acerca de la distribución de los datos estadísticos, con valores que midan cuán estrechamente se agrupan los datos entre ellos y en torno de la media, y que determinen la dispersión de los datos en torno de la media. Así, los datos, 0, 4 y 8 están más dispersos con respecto a la media que 2, 4 y 6. De las diferentes medidas de dispersión, aquí se analizarán el rango y la desviación media.

Núm. de sesiones: 3

## BLOQUE V

**Contenido 28.****Resolución de problemas mediante ecuaciones**

Es común que, al tratar de resolver un problema que puede resolverse eficazmente con una ecuación, los alumnos prefieran recurrir a procedimientos aritméticos. Aunque lo importante es que la clase participe en la discusión de estrategias de resolución del problema, ya sea que éstas se basen en tablas, diagramas o gráficas, conviene orientar la discusión hacia el uso de ecuaciones. Una manera eficaz de hacerlo consiste en introducir modificaciones al problema, tanto numéricas como contextuales, de modo que aquellas estrategias resulten inadecuadas para la resolución de la nueva versión del problema.

Núm. de sesiones: 4

**Contenido 29.****Secciones planas de cilindros y conos.  
Problemas de variación**

Para hacer que el contenido de este apartado sea más familiar a los alumnos y para desafiar su imaginación espacial, podría presentar figuras de objetos de uso cotidiano: focos, lápices, pantallas de lámparas, quesos cilíndricos, postres en envases cónicos, etcétera, pedirles que trabajaran en parejas y que, de manera alternada, dibujen una sección de una de las figuras y la enseñen a su compañero. Éste debe encontrar de qué cuerpo es sección y desde qué punto de vista está realizada. Después, se invierten los papeles: ¿se puede obtener una sección rectangular o triangular al hacer un corte al queso cilíndrico?

Es posible que los alumnos no distingan entre la hipérbola y la parábola, e incluso la elipse, porque en el contexto de la superficie cónica es finita y pueden obtenerse trozos de elipse que no se identifiquen como tales. Debe aprovechar oportunidades para caracterizar cada una de estas cónicas, aunque no es éste el momento oportuno para profundizar en sus propiedades, porque podría cortar el desarrollo del bloque.

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 30.****Fórmulas del volumen de cilindros y conos**

Para construir la fórmula del volumen del cilindro es posible seguir un procedimiento análogo al empleado para determinar el área del círculo (considerar éste como un polígono de un número indeterminado de lados). Puede considerarse un prisma inscrito en el cilindro (es decir, que tenga la misma altura), cuyas bases sean polígonos inscritos en las circunferencias de las bases del cilindro. Al aumentar el número de lados de los polígonos de las bases, también aumentará el número de caras laterales del prisma. De esta manera podrá comprenderse intuitivamente que el volumen del prisma tenderá al volumen del cilindro.

Para construir la fórmula del volumen del cono podrá seguirse un procedimiento análogo al anterior, ahora con una pirámide inscrita en el cono.

Núm. de sesiones: 2

**Contenido 31.****Cálculo del volumen de cilindros y conos**

Los problemas que se propongan sobre el volumen del cilindro y el cono no deberán limitarse a la simple realización de operaciones; se trata de que, al resolver un problema, los alumnos pongan en juego la estimación espacial, el conocimiento de las fórmulas y la relación entre los volúmenes de estos cuerpos geométricos, cuando ambos tienen la misma base. Por ejemplo, ¿cuántas veces cabe el contenido de un envase cónico en el de un envase cilíndrico, si ambos tienen la misma base, pero la altura del cono es el doble que la del cilindro (o la altura del cilindro es el doble de la del cono).

Los problemas también pueden referirse a la variación del volumen de cualquiera de ellos (por ejemplo, del cilindro), al aumentar 1, 2, 3,... cm su altura. Asimismo, deberán proponerse problemas en los que se tenga que recurrir al uso de ecuaciones, lineales o cuadráticas, al tratar de hallar el valor del radio o la altura.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 32.****Relación entre la fórmula de una función y su representación gráfica**

En este apartado se revisan y se profundizan conceptos estudiados en este curso y en cursos anteriores; en particular, la lectura y la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas, estudiando sus características y presentando las situaciones dentro de contextos reales. En el caso de las funciones lineales, se trata de que los alumnos diferencien entre las funciones que son de proporcionalidad directa y las que no lo son. Se introduce la parábola en situaciones de la Física, y se observan sus características más generales, como el vértice y el eje de simetría. Se estudia el significado del coeficiente  $a$ , y la relación entre su signo y la orientación de la curva, y entre su valor y la anchura de la misma.

Se trata también de que los alumnos aprendan a representar parábolas en general, destacando la importancia de hacer esta representación con métodos cualitativos, hallando primero el vértice, trazando el eje de simetría y obteniendo algunos pares de valores que tengan la misma ordenada.

Núm. de sesiones: 3

**Contenido 33.****Juegos de azar**

En este apartado se trata de que los alumnos reconozcan cuándo un juego de azar es justo o equitativo, es decir, un juego en el que todos los que participan cuentan con igual probabilidad de ganar; para ello habrá que recurrir a la noción de probabilidad clásica. Se trata también de que los alumnos sean capaces de proponer cambios:

- En las reglas del juego de azar, de modo que no favorezcan a ningún jugador.
- En el objeto con que se juega (ruleta, dados, monedas, etcétera).
- En el importe del premio, de modo que se compensen las desventajas.

Núm. de sesiones: 4

## Bibliografía

## Consultada

- Alsina, C. et al., *Enseñar matemáticas*, España, Graó, 1998 (Biblioteca de UNO, Serie Didáctica de las Matemáticas).
- Alsina, C., R. Pérez y C. Ruiz, *Simétrica dinámica*, España, Síntesis, 1999 (Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje, vol. 13).
- Batanero, Ma. C. et al., *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis, 1996.
- Bricio Hernández, D., *Estadística descriptiva*, México, Limusa, 1983.
- Bright, G. W. et al., *Navigating through Data Analysis in grades 6-8. Principles and standards for school Mathematics*, EUA, NCTM, 2003 (Navigations Series).
- Castelnuovo, E., *Didáctica de la matemática moderna*, México, Trillas, 2004.
- Chamoso, J. et al., *Contando la geometría*, España, Nivela Libros y Ediciones, 2004.
- Chevalard, Y., M. Bosch y J. Gascón, *Estudiar matemáticas*, México, 1998 (Biblioteca del Normalista de la SEP).
- Colín, P. y G. Martínez, *De la aritmética al cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada*, Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México, 2007 (Mosaicos matemáticos, núm. 20).
- Day, R. et al., *Navigating through Geometry in grades 9-12. Principles and standards for school Mathematics*, EUA, NCTM, 2001 (Navigations Series).
- Díaz, J. et al., *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1987.
- Espinosa, H. et al., *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP, 2001.
- Giménez, J. et al., *La actividad matemática en el aula*, España, Graó, 2004 (Biblioteca de UNO, Serie Didáctica de las Matemáticas).
- Goñi, J. (coord.) et al., *Matemáticas e interculturalidad*, España, Graó, 2006 (Biblioteca de UNO, Serie Didáctica de las Matemáticas).
- Grupo Beta, *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, España, Síntesis, 1999 (Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje, vol. 14).
- Martínez Montero, J., *Competencias básicas en matemáticas*, España, Wolters Kluwer, 2008.
- Mochón, S. et al., *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, SEP, 2000 (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología).
- Moise E. E. y Floyd L. Downs Jr., *Geometría*, Colombia, Fondo Educativo Interamericano, 1972 (Serie Matemática Moderna).
- National Council of Teachers of Mathematics, *Recopilación, organización e interpretación de datos*, México, Trillas, 2000.
- Paulos, J. A., *El hombre anumérico*, España, Tusquets Editores, 1990.
- \_\_\_\_\_, *Más allá de los números*, España, Tusquets Editores, 1993.
- Peterson J. A. y J. Hashisaki, *Teoría de la aritmética*, México, Limusa, 1993.
- Segovia, I., *Estimación en cálculo y medida*, Madrid, Síntesis, 1989.
- SEP, *El manual del alumno. Competencias para el México que queremos: Hacia PISA 2012*, México, 2011.
- Velázquez, F. (coord.), *Matemáticas e internet*, España, Graó, 2004 (Biblioteca de UNO, Serie Didáctica de las Matemáticas).
- Páginas de internet**
- Geogebra, <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)> (consulta: junio de 2013).
- Guía Interactiva para Secundaria (GIS), <<http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/gis>> (consulta: junio de 2013).
- Habilidades Digitales para Todos (HDT), <<http://www.hdt.gob.mx/hdt/materiales-educativos-digitales/>> (consulta: 31 de octubre de 2013).
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi), <<http://www.inegi.org.mx/default.aspx>> (consulta: junio de 2013).

## Para los profesores

- Alsina, C., R. Pérez y C. Ruiz, *Simétrica dinámica*, España, Síntesis, 1999 (Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje, vol. 13).
- Berlanga, R. y C. Bosch, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, FCE, 2003.
- Clark, D., *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.
- Gracián Rodríguez, E., *Diccionario Auroch de Matemáticas*, México, Lukambanda Editorial, 2005.
- Grupo Beta, *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, España, Síntesis, 1999 (Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje, vol. 14).
- Martínez Montero, J., *Competencias básicas en matemáticas*, España, Wolters Kluwer, 2008.
- National Council of Teachers of Mathematics, *Recopilación, organización e interpretación de datos*, México, Trillas, 2000.
- Perelman, Y., *Aritmética recreativa*, Moscú, MR, 1986.
- Poskitt, K., *Esa condenada mala suerte*, Barcelona, Molino, 2001.
- Santos, L. M., *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, México, Trillas, 2007.
- Segovia, I., *Estimación en cálculo y medida*, Madrid, Síntesis, 1989.
- SEP, *El manual del alumno. Competencias para el México que queremos: Hacia PISA 2012*, México, 2011.
- SEP, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, 2000.
- Struik, D., *Historia concisa de las matemáticas*, México, Consejo Editorial del IPN, 1980.
- Tonda, J. y F. Noreña, *Los señores del cero. El conocimiento matemático en Mesoamérica*, México, Pangea Editores, 2001.
- Ursini, S., *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2005.

## Para los alumnos

- Anno, M., *El misterioso jarrón multiplicador*, México, FCE, 2004.
- Blatner, D., *El encanto de Pi*, México, Aguilar, 2003.
- Bosch, C. et al., *Una ventana a la incertidumbre*, México, Santillana, 2002b.
- Bosch, C. et al., *Una ventana a las formas*, México, Santillana, 2004.
- Bosch, C. et al., *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana, 2002c.
- Bosch, C. et al., *Una ventana al infinito*, México, Santillana, 2002a.
- Castelnuovo, E., *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*, México, Trillas, 2001.
- De la Peña, J. A., *Geometría y el mundo*, México, Santillana, 2002a.
- , *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana, 2002b.
- Hernández Garcíadiego, C., *La geometría en el deporte*, México, Santillana, 2002.
- , *Matemáticas y deportes*, México, Santillana, 2007.
- Jouette, A., *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook, 2000.
- Langdon, N. et al., *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, SEP, 2004.
- Marván, L. M., *Andrea y las fracciones*, México, Santillana, 2002b.
- , *Representaciones numéricas*, México, Santillana, 2002a.
- Noreña, F. et al., *La medición y las unidades*, México, Santillana, 2002.
- Perelman, Y., *Matemáticas recreativas*, México, Planeta, 2003.
- Ruiz, C. et al., *Crónicas algebraicas*, México, Santillana, 2002a.
- Ruiz, C. et al., *Crónicas geométricas*, México, Santillana, 2002b.
- Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1992.

## Videos

- El mundo de las matemáticas*, El video en el aula, Video SEP.
- Resuélvelo*, El video en el aula, Video SEP.

## Créditos iconográficos

© Acervo Fotográfico Editorial: p. 147. Instituto Nacional de Estadística y Geografía: p. 17. © Secretaría de Educación Pública: pp. 257-258. © Shutterstock: pp. 65, 146, 199.

### MATEMÁTICAS 3

Fortino Escareño • Olga Leticia López

**Matemáticas 3** es un texto elaborado con base en el enfoque de resolución de problemas, el cual consiste en proponer actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos, y que los inviten a reflexionar y a encontrar distintas formas de solucionar los problemas con argumentos que respalden sus resultados.

La obra consta de cinco bloques, conformados por lecciones que inician con el planteamiento de una situación problemática, para introducir los conocimientos y desarrollar habilidades. Cada situación problemática intenta provocar en los alumnos un conflicto cognitivo que los mueva a buscar la colaboración de sus compañeros.

Después de la situación problemática se propone una sección de exploración y discusión en la que, mediante preguntas, se orienta la búsqueda de procedimientos de solución. El tipo de preguntas invita a los estudiantes a trabajar en parejas, en equipos y, en ocasiones, de manera grupal.

Cuando se requiere el uso de terminología o simbolismos que no pueden ser inferidos por los alumnos, se incluyen algunas notas matemáticas. A partir de allí se usa la terminología formal.

Las lecciones cierran con actividades en las que los estudiantes aplicarán en otros contextos lo aprendido, y lo vincularán con situaciones de la vida cotidiana y de otras disciplinas.

Como complemento para la obra, al final se incluye una sección que guiará a los alumnos en la exploración de un programa computacional de geometría dinámica.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA  
PROHIBIDA SU VENTA

ISBN 978-607-17-1872-3



9 786071 718723  
www.trillas.com.mx